Ficha de Exercícios
Matemática A – 10º ano de escolaridade

Tema: funções e gráficos Prof. Jorge Pinto

1. Determina, em cada caso, o domínio da função f definida, em $\mathbb{R}$, por:

   a) $f(x) = \frac{2}{x^2-1} + \sqrt{4-3x}$

   b) $f(x) = \sqrt{2-x}$

Sol. a. $D_f =]-\infty, \frac{4}{3}] \setminus \{-1,1\}$ b. $D_f =]-\infty, 2]$

2. O domínio da função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{-x+3}}{x^2-16}$ é:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ **(B)** $]-\infty, 3]$ **(C)** $]-\infty, 3] \setminus \{-4\}$ **(D)** $[3, +\infty[\setminus \{4\}$

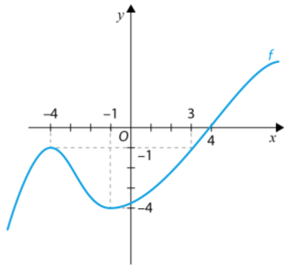
Sol. (C)

3. Considere a função g definida por $g(x) = \sqrt{x+1}$.

   Na figura está representada, num referencial $o.n.\ Oxy$, parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}$.

   Qual dos seguintes conjuntos corresponde ao domínio da função $g \circ f$?

(A) $\{-4\} \cup [3, +\infty[$ **(B)** $[3, +\infty[$ **(C)** $[-1, +\infty[$ **(D)** $[-4, 3[$



Sol. A

4. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, estude a paridade de cada uma das funções seguintes.

   a. $f(x) = 3x - 7$
   b. $f(x) = x^3 - x$
   c. $f(x) = -x^4 + x^2$
   d. $f(x) = \frac{3}{2x}$
   e. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Sol. a. f não é uma função par nem ímpar b. $f(-x) = -f(x)$, logo conclui-se que f é uma função ímpar c. $f(-x) = f(x)$, logo conclui-se que f é uma função par d. $f(-x) = -f(x)$, logo conclui-se que f é uma função ímpar e. $f(-x) = -f(x)$, logo conclui-se que f é uma função ímpar.

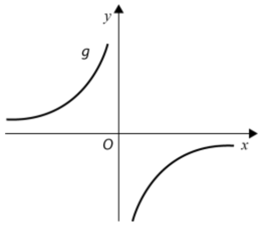
5. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f é ímpar;
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$.

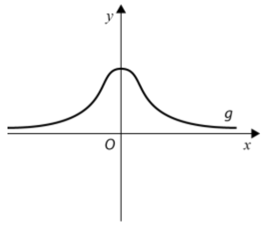
Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Nenhuma das representações gráficas a seguir apresentadas é a representação gráfica da função g.

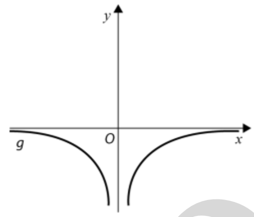
(I)



(II)



(III)



Elabore uma composição na qual apresente, para cada uma das representações gráficas, uma razão pela qual essa representação não pode ser a representação gráfica da função g.

Sol. função g definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ tem domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, pois $D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \in D_f \ \wedge \ x \neq 0\}$.

Assim, a representação gráfica apresentada em (II) não poderá ser a representação gráfica de g, pois apresenta-nos uma representação gráfica de uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Como f é uma função ímpar, tem-se que $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

Assim, $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$, ou seja, $g(-x) = g(x), \forall x \in D_g$, logo g é uma função par, o que exclui a opção apresentada em (I), já que esta é a representação gráfica de uma função ímpar (o seu gráfico é simétrico em relação à origem do referencial).

Como $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$ e $x < 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$, tem-se que $g(x) = \frac{f(x)}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$, o que não se verifica na representação gráfica (III), que apresenta uma função negativa em todo o seu domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Determine a e b de forma que g, definida por $g(x) = x^4 + (a-2)x^2 + (b+1)x + 3$, seja uma função par.

Sol. $g(-x) = g(x)$, portanto $a \in \mathbb{R}$ e $b = -1$

7. Considere a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + (2-k)x + 1$, com$k \in \mathbb{R}$.

A função f é par se:

(A) $k = 0$ (B) $k = 2$ (C) $k = -2$ (D) $k \in \{0, 2\}$

Sol. B

8. Dada uma função f sabe-se que $G_f = \{(-4,-1), (-3,2), (1,3), (2,5)\}$.

Seja g a função definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$.

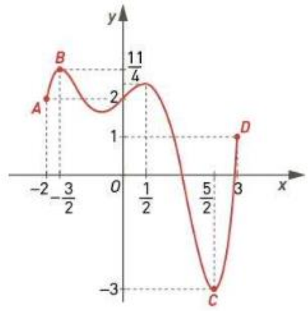
Qual dos seguintes pontos pertence ao gráfico de g ?

(A) $(1,12)$ (B) $(4,3)$ (C) $(-12,8)$ (D) $(-1,-1)$

Sol. B

9. Na figura está representada graficamente uma função f de domínio $[-2,3]$.

Sabe-se que nos pontos B e C a função atinge, respetivamente, um máximo e um mínimo absolutos, sendo $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$ e $C\left(\frac{5}{2}, -3\right)$.



a) Indica o domínio e o contradomínio de cada uma das seguintes funções:

i. $g(x) = \frac{5}{4} + f(x+4)$

ii. $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

b) Seja i a função tal que $i(x) = f(x) + 2k$.

Determina os valores de k para os quais a equação $i(x) = 0$ é impossível.

c) Seja m a função do tipo $m(x) = a + f(x-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $E(2,1)$ é o ponto onde a função m atinge um mínimo absoluto.

Determina os valores de a e b.

Sol. ai) $D_g = [-6, -1]$ e $D'_g = \left[-\frac{7}{4}, 4\right]$

aii) $D_h = [-4,6]$; $D'_h = \left[-3, \frac{11}{4}\right]$

b. A equação $i(x) = 0$ é impossível se $2k > 3 \vee 2k < -\frac{11}{4}$, ou seja, $k > \frac{3}{2} \vee k < -\frac{11}{8}$.

Então, $k \in \left]-\infty, -\frac{11}{8}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

c. Como o ponto onde f admite o mínimo absoluto é $\left(\frac{5}{2}, -3\right)$, conclui-se que: $-3 + a = 1 \Leftrightarrow a = 4$.

Por outro lado, $\frac{5}{2} + b = 2 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Então, $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$.

10. Seja g uma função bijetiva tal que o ponto de coordenadas $(3, -2)$ pertence ao seu gráfico.

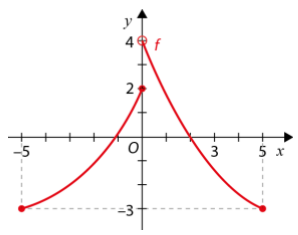
Considere a função h, definida por $h(x) = g(x-1) + 2$.

Qual dos pontos seguintes pertence necessariamente ao gráfico da função h^{-1}, função inversa de h?

(A) $(0,2)$ (B) $(0,4)$ (C) $(2,0)$ (D) $(4,0)$

Sol. B

11. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o gráfico de uma função f, de domínio$[-5, 5]$.



Acerca da função f, em qual das opções seguintes as três afirmações são verdadeiras?

(A) $D_f = [-5, 5]$; $D'_f = [-3, 4]$; $\forall x_1, x_2 \in D_f,\ \ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

(B) $D_f = [-3, 4[$; $D'_f = [-5, 5]$; f não é par.

(C) f tem exatamente dois zeros; 4 é máximo absoluto da função; f é par.

(D) f não é ímpar; -3 é mínimo absoluto da função; $\exists x_1, x_2 \in D_f$: $\ x_1 \neq x_2 \ \wedge f(x_1) = f(x_2)$.

Sol. D

12. Dadas duas funções f e g, sabe-se que o gráfico da função g obtém-se a partir do gráfico da função f,

aplicando-lhe uma translação de vetor $\vec{u}(-2, 3)$.

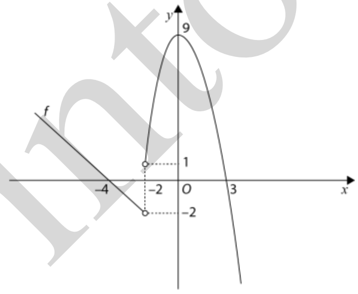
Qual das afirmações é verdadeira?

(A) $g(x) = 3f(x-2)$ (B) $g(x) = 3 - f(x-2)$

(C) $g(x) = 3 + f(x+2)$ (D) $g(x) = 2 + f(x+3)$

sol. C

13. Na figura está representada graficamente a função real de variável real f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Sabe-se que o gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas -4 e 3.



a) Considere a função g definida por $g(x) = -f(x+2)$.

Indique, justificando, quais são os zeros de g.

b) Considere a função h definida por $h(x) = f(-x) + 1$.

Em qual das opções se encontra o quadro de variação da função h?

(A)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Variação de h	↘	n. d.	↗	9	↘

(B)

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
Variação de h	↗	n. d.	↘	-9	↗

(C)

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Variação de h	↗	9	↘	n. d.	↗

(D)

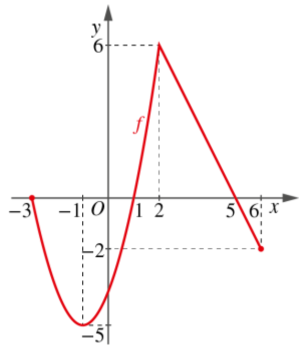
x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Variação de h	↗	10	↘	n. d.	↗

c) Seja m a função definida por $m(x) = 2x - 5$.

Calcule o valor de $(m \circ f)(-4) + m^{-1}(7)$.

Sol. a. Os zeros são, então, $-4 - 2 = -6$ e $3 - 2 = 1$; **b. (D)** O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por uma reflexão segundo o eixo Oy, seguida de uma translação associada ao vetor $(0, 1)$. **c.** $(m \circ f)(-4) + m^{-1}(7) = -5 + 6 = 1$

14. Na figura está representada uma função f de domínio $[-3, 6]$.



Sabe-se que:

- os zeros de f são: $-3, 1$ *e* 5;
- para $x \in [2, 6]$ a representação gráfica é um segmento de reta.

a) A função f é injetiva? Justifica.

b) Observa a representação gráfica e indica qual das seguintes afirmações é **falsa**.

(A) $f(-\sqrt{2}) < f(-\sqrt{3})$ (B) $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$

(C) $f\left(\frac{3}{2}\right) - f(-2) < 0$ (D) $f\left(-\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) Indica para que valores de k a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções.

d) O ponto P pertence ao gráfico de f e tem abcissa 3.

Determina a ordenada de P.

e) Considera a função g definida por $g(x) = f(x-2)$.

Em relação à função g, indica o domínio e constrói um quadro de sinais.

f) Seja h a função definida por $h(x) = -f(2x)$.

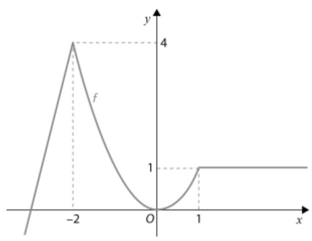
Descreve as transformações para obter o gráfico de h a partir do gráfico de f e indica o contradomínio da função h.

sol. a. A função é não injetiva, pois admite objetos diferentes com a mesma imagem. Por exemplo, 1^1 5 e $f(1) = f(5) = 0$. b. (C) c. $k \in]-5, -2[\cup]0, 6[$ d. A ordenada do ponto P é 4. E. O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f por uma translação de vetor $\vec{u}(2,0)$. Assim, o domínio de g é $[-1, 8]$

x	-1		3		7		8
$g(x)$	0	-	0	+	0	-	-

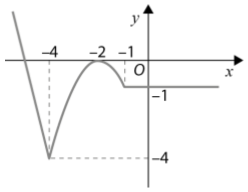
f. $h(x) = -f(2x)$ O gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$, seguida de uma reflexão de eixo Ox. Assim, o contradomínio da função h é $[-6, 5]$. **Resposta:** $D'_h = [-6, 5]$

15. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função f.

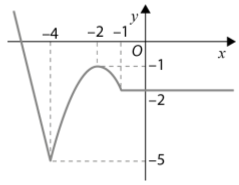


Qual dos seguintes gráficos representa a função $g(x) = -f(x+2) - 1$?

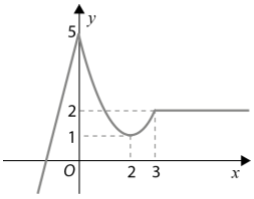
(A)



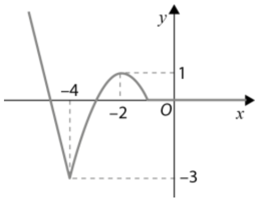
(B)



(C)



(D)



Sol. B

16. Considere as funções reais de variável real f, cujo gráfico é $G_f = \{(-2,3),(-1,4),(0,5),(1,2),(2,1)\}$, e g tal que $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$.

a) Indique o domínio e o contradomínio da função f.

b) Averigue se f é uma função injetiva.

c) Determine o domínio da função g. Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais

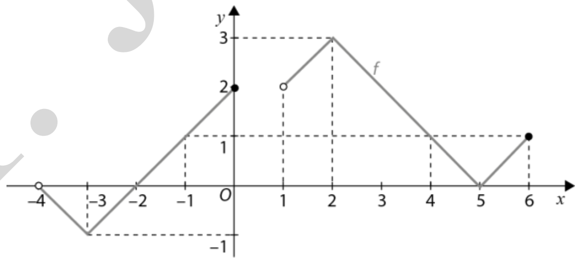
d) Calcule:

i. $f \circ g\left(-\frac{1}{2}\right)$

ii. $g \circ f^{-1}(2)$

sol. a. $D_f = \{-2,-1,0,1,2\}$ $D'_f = \{1,2,3,4,5\}$ b. f é uma função injetiva. c. $D_g = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \,]0,+\infty[$ di. 5 dii. $\sqrt{3}$

17. Na figura está representado o gráfico de uma função real de variável real f.

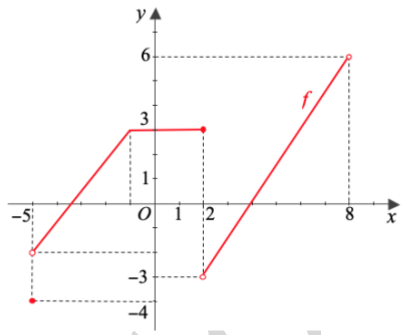


a) Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos.

b) Determine os valores de x para os quais $f(x) < 1$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

Sol. a. f é estritamente decrescente em $]-4,3]$ e em $[2,5]$; é estritamente crescente em $[-3,0]$, em $]1,2]$ e em $[5,6]$. -1 é um mínimo absoluto da função e -3 é um minimizante; 3 é um máximo absoluto da função e 2 é um maximizante; 0 é um mínimo relativo da função e 5 é um minimizante; 2 e 1 são máximos relativos da função e 0 e 6 são maximizantes. b. $x \in \,]-4,-1[\, \cup \,]4,6[$

18. Considere o gráfico cartesiano da função f, de domínio $[-5\,,\,8[$, representado num referencial cartesiano xOy.



a) Indique:

i. o contradomínio de f;

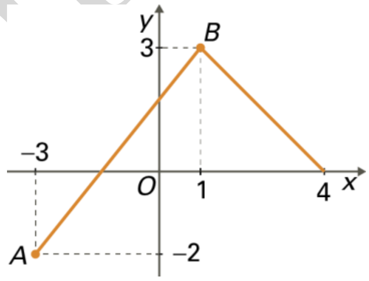
ii. o intervalo de maior amplitude onde f é crescente em sentido lato;

b) Determine os zeros de f.

c) Determine o domínio da função h definida por $h(x) = 2 - f(2x)$.

Sol. ai. $D'_f = \{-4\} \cup]-3\,,\,6[$ aii. $[-5\,,\,2]$ b. zeros da função são $-\frac{17}{5}$ e 4. C. $D_h = \left[-5\times\frac{1}{2}\,,\,8\times\frac{1}{2}\right[= \left[-\frac{5}{2}\,,\,4\right[$

19. Na figura está representado, num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico da função *f* definida em $[-3\,,\,4]$ onde foram assinalados os pontos *A* e *B* pertencentes ao gráfico de *f*.



a) Indique o contradomínio da função *f*.

b) Defina analiticamente o segmento de reta [*AB*].

c) A função *f* tem exatamente dois zeros, um negativo e outro positivo.

Indique o zero positivo e determine o zero negativo.

d) Considere a função *g* tal que, para todo o $x \in D_g$, $g(x) = f(x-2) - 1$.

i. Explique como pode obter o gráfico da função *g* a partir do gráfico da função *f*.

ii. Seja $D'_g = [-a, b+1]$ o contradomínio da função *g*.

Determine o valor real de *a* e de *b*.

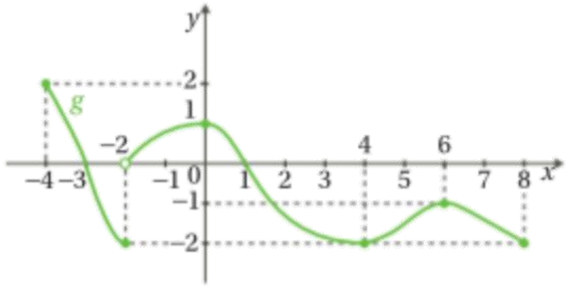
e) Considere a função *h*, tal que, para todo o $x \in D_h$, $h(x) = f(x) + 2b$.

Indique os valores reais de *b* de modo que a função *h* não tenha zeros.

Sol. **a.** $D'_f = [-2\,,\,3]$ **b.** $(x\,,\,y) = (-3\,,\,-2) + t(4\,,\,5), t \in [0\,,\,1]$ **c.** O zero positivo é $x = 4$. O zero negativo é $x = -\frac{7}{5}$ **di.** O gráfico da função *g* obtém-se a partir do gráfico da função *f* pela translação associada ao vetor de coordenadas $(2\,,\,-1)$. dii. $a = 3$ e $b = 1$ e. $b \in]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, +\infty[$

20. Na figura seguinte está representada graficamente a função g

Indica:



a) O domínio e contradomínio de g.

b) $g(-2)$

c) x, tal que $g(x) = -2$.

d) Os zeros de $h(x) = 2g(x+3)$.

e) Quadro de variação

f) Um intervalo onde a função seja positiva e crescente.

g) O domínio de $h(x) = 2 + g\left(\frac{1}{2}x\right)$.

h) Os máximos relativos de g e os respetivos maximizantes.

i) Os mínimos relativos de g e os respetivos minimizantes.

Sol. a. $D_g = [-4,8]$, $D'_g = [-2,2]$ b. -2. C. $\{-2,4,8\}$ d. $\{-6,-2\}$ e.

-4		-2		0		4		6		8
2	↘	-2	↗	1	↘	-2	↗	-1	↘	-2

f. $]-2,0]$ g. $D_h = [-8,16]$ h. máximos relativos: -1, 1 e 2 maximizantes $-4, 0$ e 6 i. Mínimos relativos: -2 minimizantes $-2, 4$ e 8

21. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que a função f tem exatamente três zeros: $-2, 3$ e 5

a) Considera a função g de domínio $\mathbb{R}$ e definida por $g(x) = 2 - f(x+5)$

Indica as transformações geométricas que deves aplicar ao gráfico de f para obteres o gráfico de g.

b) Considera, agora, a função h de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x-k), k \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que a soma dos zeros da função h é igual a 4. O valor de k é:

(A) 2 (B) $-\dfrac{5}{2}$ (C) -4 (D) $-\dfrac{2}{3}$

Sol. a) Começa-se por aplicar uma translação de vetor $\vec{u}(-5,0)$. De seguida, uma reflexão de eixo Ox e, por fim, uma translação de vetor $\vec{v}(0,2)$. b) D

22. Seja $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e h uma função ímpar de A em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que $h(1) = 4$, $h(-2) = 3$ e $h(-3) = -5$.

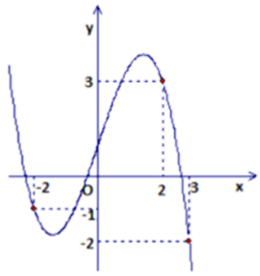
Determina o contradomínio de h.

Sol. $D'_h = \{-5,-4,-3,0,3,4,5\}$

23. Considera as funções f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, estando representada na figura parte da função g e sendo f tal que $f(x) = \frac{2x-5}{2}$.

O valor de $(f^{-1} \circ g)(3)$

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) -2



Sol. B

24. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é ímpar;
- f tem exatamente três zeros;
- $f(1) = 0$.

Seja $g(x) = 2f(x-1)$. Determina os zeros de g

Sol. os zeros de g são: 0 , 1 e 2

25. Considere uma função f de contradomínio $[-2,4]$. Sabendo que a função $g(x) = f(x) + k$ tem contradomínio $[-6, 0]$, determine o valor de k.

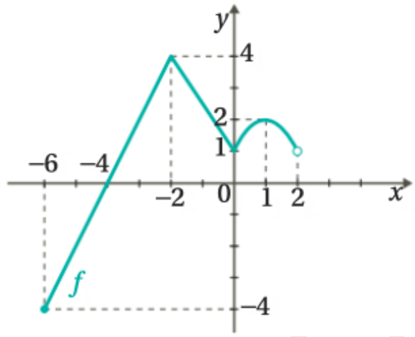
Sol. $k = -4$

26. Na figura está representado, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função f.

a) Indique o domínio e o contradomínio da função f.

b) Construa uma tabela de variação da função f.

c) Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.



d) Indique um intervalo $[a,b] \subset D_f$ em que:

i. a função f seja positiva e decrescente;

ii. a função f seja positiva e crescente;

iii. $\exists x_1, x_2 \in [a,b]: x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

e) Considere a função g definida por $g(x) = -f(-x) + 1$.

i. Indique o domínio e o contradomínio da função g.

ii. Estude a função g quanto à monotonia e existência de extremos.

Sugestão: Faça um esboço do gráfico da função g.

Sol. a. $D_f = [-6,2[$ e $D'_f = [-4,4]$ b.

x	-6		-2		0		1		2
$f(x)$	-4	↗	4	↘	1	↗	2	↘	n. d.

c. Crescente em $[-6,-2]$ e em $[0,1]$ e decrescente em $[-2,0]$ e em $[1,2[$ $f(-6) = -4$ é mínimo absoluto (é também mínimo relativo); $f(-2) = 4$ é máximo absoluto (é também máximo relativo) e $f(0) = 1$ é mínimo relativo d. i $[-2,-1]$ ii $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ iii $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ ei. $D_g =]-2,6]$ e $D'_g = [-3,5]$ eii. Decrescente em $]-2,-1]$ e em $[0,2]$ e é crescente em $[-1,0]$ e em $[2,6]$. $g(-1) = -1$ é mínimo relativo; $g(0) = 0$ é máximo relativo; $g(2) = -3$ é mínimo absoluto (também é mínimo relativo) e $g(6) = 5$ é máximo absoluto (também é máximo relativo)

27. Seja f uma função de domínio $[-3,5]$ e contradomínio $[-2,3]$

a) Indique uma transformação g do plano, para a qual a imagem do gráfico cartesiano de f seja o gráfico cartesiano de uma função que tenha:

i. O mesmo domínio de f e contradomínio $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$;

ii. O mesmo contradomínio de f e domínio $[-15,25]$.

b) Indique uma expressão analítica para cada uma das funções obtidas na questão anterior.

Sol. ai. g é uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$ aii. g é uma dilatação horizontal de coeficiente 5 b. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$, $g(x) = f\left(\frac{x}{5}\right)$

28. Considere g uma função, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$ e ímpar. Qual é o valor de $h(-2)$ sendo a função h definida por: $h(x) = \frac{g(x+2)-3}{x^2+2}$

sol. $-\frac{1}{2}$

29. Considere f a função, real de variável real, de domínio $[-6,6]$ representada graficamente na figura ao lado. Tal como a figura sugere, -5 e 0 são os únicos zeros de f.

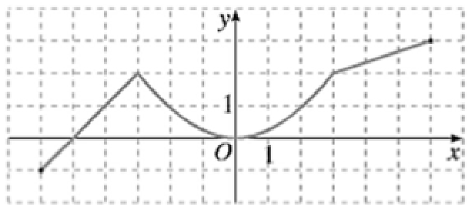
a) Justifique que f não é par nem injetiva.

b) Indique os zeros das funções definidas por:

i. $g(x) = f(x-2)$

ii. $h(x) = f(-x)$

iii. $i(x) = -2f(x)$



c) Considere a função $t(x) = f(x) + k$, com k real. Determine os valores de k para que t tenha:

i. Um único zero.
ii. Dois zeros simétricos.
iii. Quatro zeros.

d) De uma função m sabe-se que o seu gráfico é a imagem do gráfico de f pela composição de uma translação vertical com uma contração. Sabe-se ainda que $D_m = [-3, 3]$ e $m(0) = -3$. Escreva uma expressão analítica da função m.

Sol. a. A função f não é par porque, por exemplo, $f(-6) \neq f(6)$. Não é injetiva porque existem objetos diferentes com a mesma imagem, por exemplo, -3 e 3 . bi. -3 e 2 bii. 0 e 5 biii. -5 e 0 ci. $k \in [-3, -2[\cup]0,1]$ cii. $k \in [-2,0[$ ciii. Impossível, já que não existe x, tal que $f(x) = -k$ tenha 4 soluções d. $m(x) = f(2x) - 3$

30. Considera a função quadrática f definida por $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

a) Determina:

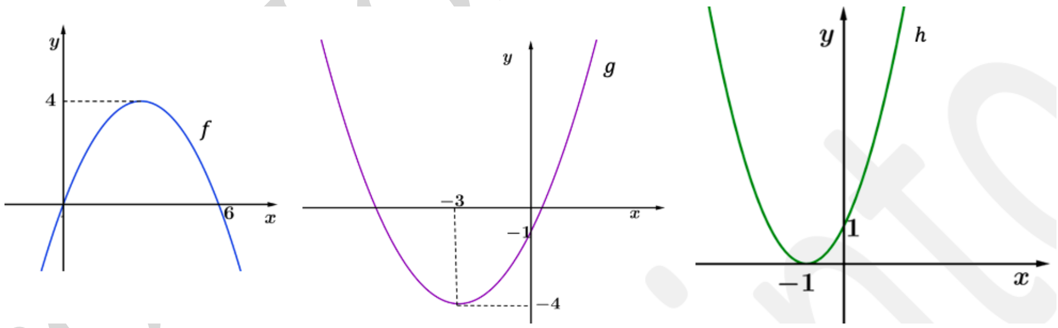
i. os zeros;
ii. as coordenadas do vértice da parábola que corresponde ao gráfico de f.
iii. uma equação do eixo de simetria do gráfico de f.

b) Estuda a função f quanto ao sinal.

c) Estuda a função f quanto à variação e extremos.

Sol. ai. Os zeros da função f são $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ e $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. aii v$(-1, -3)$. aiii $x = -1$.b $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1 - \frac{\sqrt{6}}{2}[\cup]-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty[$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}[$ c. f é crescente em $[-1, +\infty[$, f é decrescente em $]-\infty, -1]$. f tem minimo absoluto igual a -3.

31. Define analiticamente as funções quadráticas f , g e h , que se encontram representadas graficamente.



Sol. $f(x) = -\frac{4}{9}(x-3)^2 + 4$ $g(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 4$ $h(x) = (x+1)^2$

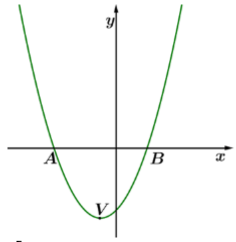
32. Considera as funções quadráticas seguintes, definidas em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \;\; ; \;\; g(x) = 2x^2 + 4x + 6 \;\; e \;\; h(x) = -x^2 + 5x - 6$$

Escreve as funções na forma $y = a(x-h)^2 + k$.

sol. $f(x) = (x-3)^2 - 1$; $g(x) = 2(x+1)^2 + 4$; $h(x) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

33. Considera função f definida por $f(x) = x^2 + x - 2$ e que se encontra representada graficamente:



a) Determina as coordenadas de A e de B.

b) Calcula a área do triângulo $[ABV]$.

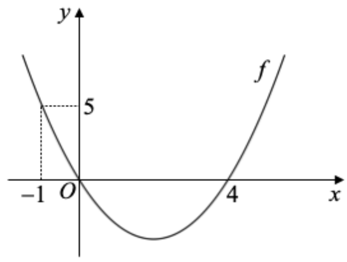
c) Determina o contradomínio e uma equação do eixo de simetria.

Sol. a. A(-2,0) B(1,0) b. $\frac{27}{8}$ c. $D' = \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right[$, eixo simetria $x = -\frac{1}{2}$

34. Na figura, está representada, num referencial o. n. xOy , parte da parábola que é o gráfico de uma função f.

Sabe-se que:

- a parábola contém o ponto de coordenadas $(-1, 5)$;
- os zeros de f são 0 e 4.



a) Mostre que a função f é definida por $f(x) = (x-2)^2 - 4$.

b) Determine os valores de x que satisfazem a condição $f(x) \geq 5$.

Apresente o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

c) Considere a função g definida por $g(x) = 2 + f(x-1)$.

Determine:

i. o contradomínio de g ;

ii. os zeros de g .

sol. a. $f(x) = (x-2)^2 - 4$ b. $f(x) \geq 5 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[5, +\infty\right[$ ci) $D'_g = \left[-2, +\infty\right[$ cii) zeros de g: $3+\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{2}$

35. Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabe-se que :

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 5.

Qual é o contradomínio de f?

(A) $]-\infty; 0]$ (B) $[0; +\infty[$ (C) $]-\infty; 5]$ (D) $[5, +\infty[$

Sol. B

36. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a. $x^2 - 9 > 0$

b. $-2x^2 + x \leq 1$

c. $-x(x-3) \geq 0$

d. $2(1 - 3x^2) \leq x$

e. $x^2 + 2x > \frac{x+2}{3}$

f. $\frac{(2x+1)^2}{3} \geq x + 2$

Sol. **a.** $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ **b.** $\mathbb{R}$ **c.** $[0,3]$ **d.** $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ **e.** $]-\infty,-2[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ **f.** $\left]-\infty,-\frac{5}{4}\right]\cup[1,+\infty[$

37. Uma bola é lançada na vertical de baixo para cima. A altura h, em metros, a que se encontra do solo t segundos após o lançamento é dada por $h(t) = -5t^2 + 30t + 1$

a. Determina a altura a que a bola se encontrava no instante inicial.

b. Calcula $h(2)$ e interpreta o resultado do contexto do problema.

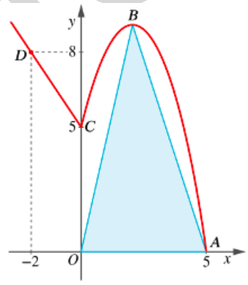
c. Determina a altura máxima atingida pela bola e o instante em que ocorreu.

d. Qual o intervalo de tempo em que a bola se encontrava a mais de 26 metros de altura?

e. Em que instante a bola atingiu o solo

Sol. a. 1 m b. 41m, c. 46 m aos 3s d.]1,5[e. Aprox 6s

38. Na figura está representada uma função f de domínio $]-\infty, 5]$.



Sabe-se que:

- para $x \in \mathbb{R}_0^-$, a representação gráfica é uma semirreta com origem em $C(0,5)$ e que passa por $D(-2,8)$;
- para $x \in]0,5]$, as ordenadas dos pontos do gráfico são dadas pela expressão $f(x) = -x^2 + 4x + 5$;
- a abcissa do ponto B é máximo relativo da função.

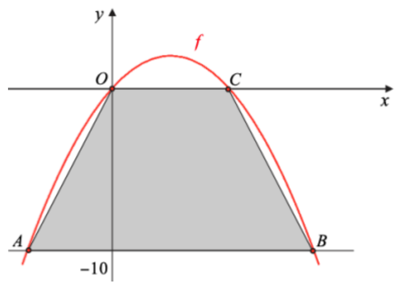
Determina:

a) a ordenada do ponto do gráfico de f que tem abcissa –5;

b) a área do triângulo $[OAB]$.

Sol. a $\frac{25}{2}$ b. a área do triângulo $[OAB]$ é 22,5.

39. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico cartesiano da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -\frac{2}{9}(x-3)^2 + 2$



Sabe-se que:

- os pontos A e B são pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = -10$;
- os pontos O e C são pontos da interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

a) Determine o contradomínio de f.

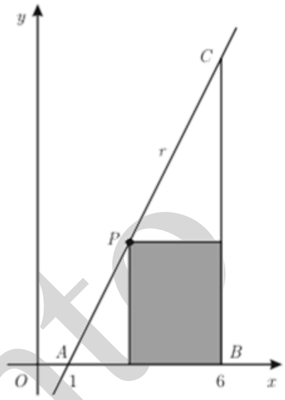
b) Mostre que 0 e 6 são zeros de f.

c) Calcule a área do trapézio $[ABCO]$.

d) Resolva a inequação $f(x) < g(x)$, sendo $g(x) = \frac{10}{9}x$.

Sol. a $D'_f =]-\infty, 2]$ b. 0 e 6 são zeros de f; c $A_{\text{Trapézio}} = \frac{6\sqrt{6}+6}{2} \times 10 = 30\sqrt{6}+30$; d $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

40. Na figura seguinte, está representada, em referencial $o.n.\ xOy$, a reta r, definida pela equação $y = 2x - 2$. Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas $(1,0)$ e $(6,0)$, respetivamente, e C é o ponto da reta r de abcissa 6. Considera que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto C. A cada posição do ponto P corresponde um retângulo em que uma das diagonais é o segmento $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox.



Seja x a abcissa do ponto P ($x \in]1,6[$)

a. Mostra que a área do retângulo é dada, em função de x, por:
$S(x) = -2x^2 + 14x - 12$

b. Determina os valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8.

Sol. b. $]1,2[\cup]5,6[$