Matemática 12º ano

Números complexos ---Prof. Mónica Pinto

1. Efetua as seguintes operações em $\mathbb{C}$ e apresenta os resultados na forma $a+bi$.

a) $(1-i)-(\frac{1}{2}-2i)$

b) $(2+i)(4-3i)$

c) $(-2+3i)^2(5-i)$

d) $i^{27}+i^{999}-(2i)^5$

e) $\frac{1+2i}{i}$

f) $\frac{3}{-1+2i}$

g) $\frac{1-3i}{1+i}$

h) $\frac{i^{2004}+i^{2005}}{i^{2002}+i^{2003}}$

i) $\frac{i^{40n+1}+3-2i}{3i-1}+(1+2i)(3i^3)$

j) $2i^{4n+1}-3i^{4n+3}+(2i)^8$

Sol. a. $\frac{1}{2}+i$ b. $11-2i$ c. $-37-55i$ d. $-34i$ e. $2-i$ f. $-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$ g. $-1-2i$ h. -1 i. $\frac{27}{5}-\frac{19}{5}i$ j. $256+5i$

2. Considera os complexos $z=3i-(2i)^2$ e $w=i+(2-i)^2$

I. Escreve na forma $a+bi$ os complexos seguintes:

a) z

b) w

c) $\bar{z}$

d) $\bar{w}$

e) $\overline{z+w}$

f) $\overline{z-w}$

g) $\overline{z^{-1}w}$

h) $-\overline{w^{-1}}$

II. Determina os seguintes números reais

a. $Re(z)$

b. $Im(z)$

c. $Im(z+w)$

d. $Re\left(\frac{z}{w}\right)$

e. $|w|$

f. $|z-w|$

g. $|zw|$

h. $\left|\frac{\bar{z}}{w}\right|$

Sol. I a. $4+3i$ b. $3-3i$ c. $4-3i$ d. $3+3i$ e. 7 f. $1-6i$ g. $\frac{3}{25}+\frac{21}{25}i$ h. $-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}i$. II. a. 4 b. -3 c. 0 d. $\frac{1}{6}$ e. $3\sqrt{2}$ f. $\sqrt{37}$ g. $15\sqrt{2}$ h. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

3. Determina o(s) valor(res) de $k\in\mathbb{R}$, para os quais:

a. $z=-3k+2i$ é um imaginário puro;

b. $z=(k-3)+(k^2-9)i$ é imaginário puro;

c. $z=2ki-3+k^2i+k$ é um número real;

Sol. a. $k=0$ b. $\{\ \}$ c. $\{-2,0\}$

4. Determina os números reais x e y tais que :

a. $(5+xi)-(y+3i)=2-5i$

b. $(5-yi)(x-i)=4-17i$

Sol. a. $x=-2$; $y=3$ b. $x=2, y=6$ ou $x=-\frac{6}{5}, y=-10$

5. Calcula

a. $z+\bar{z}$, para $z=10-4i$

b. $z-\bar{z}$, para $z=2+8i$

c. $z\times\bar{z}$ para $z=2+4i$

Sol. a . 20 b. $16i$ c. 20

6. Seja z um número complexo tal que $z\bar{z} = 24$. Determina o módulo do complexo z.

Sol. $2\sqrt{6}$.

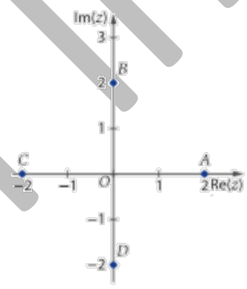
7. Sendo z o conjugado de um número complexo z, determina z tal que :

$$z + \bar{z} = 2 \wedge \ z \times \bar{z} = 5$$

Sol. $z = 1 - 2i \vee z = 1 + 2i$

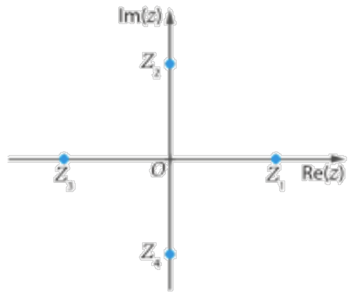
8. Seja z um número complexo diferente de zero. Prova que $\bar{z} + z^{-1} = \bar{z} \times \frac{|z|^2+1}{|z|^2}$.

9. Seja z um número complexo. No plano de Argand, qual dos pontos A, B, C ou D é o afixo de $z \times \bar{z}$?



A) A B) B C) C D) D

10. Na figura seguinte estão representadas, no plano de Argand, as imagens geométricas de quatro complexos z_1, z_2, z_3, z_4.
Qual destes é o número complexo que, com $n \in \mathbb{N}$, pode ser igual a $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2}$?



A) z_1 B) z_2 C) z_3 D) z_4

Soluções 9.A 10. B

11. Resolve, em $\mathbb{C}$, as equações seguintes, apresentando a(s) solução(ões) na forma algébrica e o mais simplificada(s) possível(is).

a. $z^2 + 8 = 0$

b. $z^2 - 2z + 4 = 0$

c. $9z^2 + 2z + 1 = 0$

d. $z^3 + 5z = 0$

e. $iz + 2 = 3i$

f. $(z + i)(1 - i) = 1 - 3i$

g. $\bar{z} + 2z = 3 + i$

h. $\frac{z-1}{z+1} = i$

i. $(1 + i)z^2 - \frac{2}{1+i}z = 0$

j. $z^2 = -3 - 4i$

Sol. a. $\{-2\sqrt{2}i, 2\sqrt{2}i\}$ b. $\{1 - \sqrt{3}i; 1 + \sqrt{3}i\}$ c. $\left\{\frac{-1-2\sqrt{2}i}{9} ; \frac{-1+2\sqrt{2}i}{9}\right\}$ d. $\{0 ; -\sqrt{5}i ; \sqrt{5}\, i\}$; e. $\{3 + 2i\}$ f. $\{2 - 2i\}$ g. $\{1 + i\}$ h. $\{i\}$ i. $\{0 , -i\}$ j. $\{-1 + 2i , 1 - 2i\}$

12. Seja z um número complexo tal que $\frac{z}{1+i} - \frac{z-1}{i} = 2i$. Determina o módulo do número complexo z.

Sol. $3\sqrt{2}$