Matemática 12º ano

Tema: probabilidades / funções / complexos ----------------------- Prof. Jorge Pinto

1. Numa caixa há 15 bolas: sete azuis, três vermelhas e as restantes pretas.
   As bolas azuis estão numeradas com os números de 1 a 7. As restantes bolas não estão numeradas distinguindo-se apenas pela cor (vermelha ou preta).
   a. As bolas são colocadas, lado a lado, em cima de uma mesa, constituindo uma sequência.
      Quantas sequências diferentes é possível formar de modo que as bolas azuis ocupem ordens consecutivas?

   b. Da caixa com as 15 bolas, são retiradas, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas.
      Determina a probabilidade de no conjunto das quatro bolas saírem duas bolas pretas, sabendo que saíram bolas das três cores.

Sol. a. 2540160 b. $\frac{1}{3}$

2. O Afonso desenvolveu uma aplicação para um banco digital. Para aceder à mesma, os utilizadores têm de definir um código de acesso constituído por 6 algarismos de 0 a 9.
   Quantos códigos com três pares de algarismos iguais existem?

   (A) 540 (B) 10800 (C) 64800 (D) 86400

Sol.B

3. Consideres todos os números naturais de cinco algarismos. Destes números, quantos têm exatamente três algarismos 8 e são menores que 40 000 ?

   (A) 108 (B) 120 (C) 270 (D) 300

Sol. A

4. Considere a linha do Triângulo de Pascal tal que o valor do seu quinto elemento é igual ao do vigésimo elemento.
   Qual é o maior elemento da linha seguinte?

   (A) 1352078 (B) 2704156 (C) 5200300 (D) 9657700

Sol. B

5. Uma empresa tecnológica portuguesa emprega 250 pessoas nos seus escritórios em Portugal e Estados Unidos da América.
   a. Acerca das pessoas empregadas nessa empresa, sabe-se que:

      • 7 em cada 10 empregados da empresa trabalham nos escritórios em Portugal;

      • 2 em cada 5 dos empregados que trabalham nos escritórios em Portugal são estrangeiros;

- 1 em cada 8 dos empregados portugueses trabalham nos escritórios nos Estados Unidos da América.

O Dennis é um empregado sueco desta empresa tecnológica.

Qual é a probabilidade do Dennis trabalhar nos escritórios em Portugal?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b. Num escritório em Lisboa dessa empresa tecnológica trabalham 25 pessoas: 18 rapazes e 7 raparigas. Vai ser formada uma comissão organizadora de um jantar de Natal que será constituída por 6 pessoas.
Sabe-se ainda que a comissão organizadora terá de ser mista. O Miguel e o Thomas são dois dos empregados nesse escritório. Vai ser escolhida, ao acaso, uma comissão entre as comissões possíveis.
Qual é a probabilidade da comissão ter pelo menos quatro rapazes e o Miguel e o Thomas pertencerem simultaneamente a essa mesma? Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

c. A comissão executiva da empresa é constituída por 11 pessoas, entre as quais 4 vice-presidentes. No jantar de Natal da empresa vai ser tirada uma fotografia à comissão executiva em que os seus membros estarão dispostos lado a lado. De quantas formas pode a comissão executiva se dispor de forma a não existirem vice-presidentes em lugares consecutivos e o CEO da empresa ocupar um lugar nos extremos?

Sol. a. $\frac{7}{13}$ b. 0,04 c. 1209600

6. Seja z um número complexo cujo afixo pertence ao terceiro quadrante (eixos não incluídos). A qual dos quadrantes não pode o afixo de $-i\bar{z}^{\,3}$pertencer?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

Sol. B

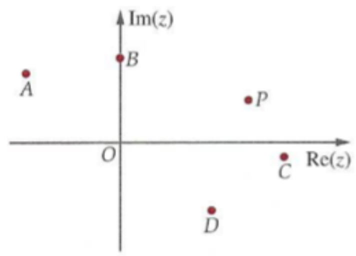
7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = 1 + i$ Seja $z_3 = e^{i\alpha}$
Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi, -\pi[$ sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

Sol. $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$

8. Considera o número complexo $w = re^{i\theta}$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$

No plano complexo da figura, o ponto P é a imagem geométrica de w.

Qual pode ser a imagem geométrica do número complexo $\frac{r}{3}e^{i(2\theta)} - \bar{w}$?



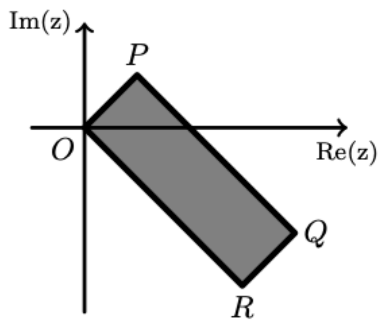
(A) O ponto A (C) O ponto C (B) O ponto B (D) O ponto D

Sol. A

9. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um retângulo. Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial
- o ponto P é a imagem geométrica de z_1
- o ponto R é a imagem geométrica de z_2
- o retângulo $[OPQR]$ tem área 6



Determine os números complexos z_1 e z_2. Apresente os resultados na forma algébrica.

Sol. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ $z_2 = 3 - 3\mathrm{i}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1, z_2 = 5i \text{ e } z_3 = e^{i\left(\frac{n\pi}{40}\right)}, n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a. O complexo z_1 é raiz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$ Determine, em C, as restantes raízes do polinómio. Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

b. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Sol. a. $z = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \vee z = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ b. 30

11. Relativamente à Figura 3 sabe-se que:

- os pontos C e D pertencem à reta de equação $x = -1$
- α é a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- $S(\alpha)$ é a área do retângulo $[ABCD]$, em função de α

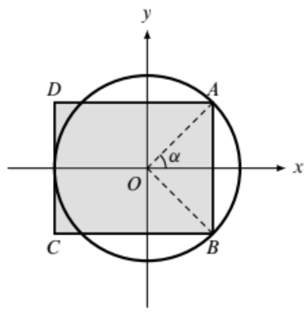


Figura 3

Admita que o ponto A desloca-se ao longo da semicircunferência, nunca coincidindo com D, e o ponto B acompanha o movimento do ponto A de forma a que AB seja sempre paralela ao eixo Oy.

a. Mostre que $S(\alpha) = \sin(2\alpha) + 2\sin(\alpha), \alpha \in]0, \pi[$.

b. Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- o(s) valor(es) de α para o(s) qual(is) a função tem extremos relativos, caso existam.

Sol. S é estritamente crescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$ e estritamente decrescente em $]\frac{\pi}{3}, \pi[$.
A função S admite um máximo em $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tal que $S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bom trabalho
Prof. Jorge Pinto