Ficha de Exercícios- Matemática 10º ano

Função Quadrática-----------------------------Prof. Mónica Pinto

1. Para cada uma das seguintes funções quadrática, definidas em $\mathbb{R}$, indica
   - O sentido da concavidade;
   - As coordenadas do vértice;

a) $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

b) $g(x) = -(x+2)^2 + 1$

c) $h(x) = -2(x-1)^2$

d) $i(x) = (x+4)^2$

e) $j(x) = 2x^2 + 1$

f) $k(x) = -3x^2 - 5$

g) $l(x) = x^2$

h) $m(x) = -2x^2$

2. Considera as funções quadráticas seguintes , definidas em $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ $\quad g(x) = 2x^2 + 4x + 2$ $\quad h(x) = -x^2 + 5x - 6$ $\quad l(x) = x^2 - 2x + 1$ $\quad m(x) = 2x^2 + 4$

Para cada uma delas:

a) Escreve as funções na forma $a(x-h)^2 + k$.
b) Indica as coordenadas do vértice .
c) Indica uma equação do eixo de simetria .
d) Indica o sentido da concavidade.
e) Indica o contradomínio.
f) Indica os intervalos de monotonia e os extremos.
g) Determina os zeros e indica o sinal do binómio discriminante.
h) Os intervalos onde a função é positiva e onde é negativa.
i) Faz o esboço.

3. Sem recorrer à calculadora, esboça o gráfico de cada uma das funções e escreve a equação do seu eixo de simetria.

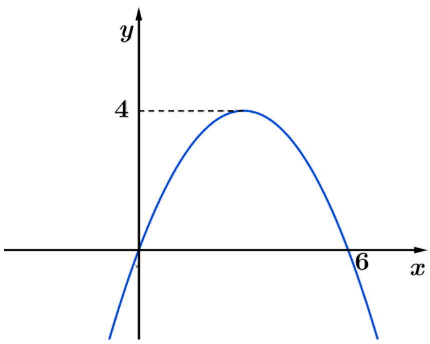
a) $f(x) = (x-1)^2 + 3$

b) $g(x) = -(x+2)^2 + 1$

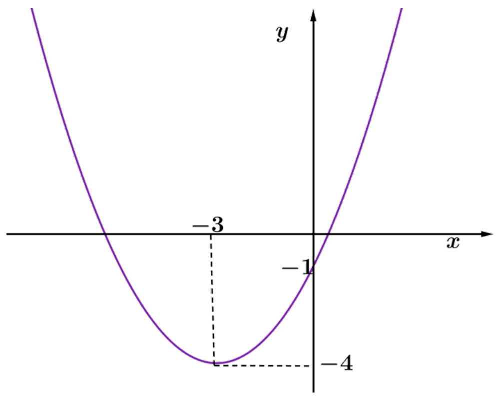
c) $h(x) = 2(x-1)^2 + 2$

4. Define analiticamente as funções quadráticas que a seguir se encontram representadas graficamente

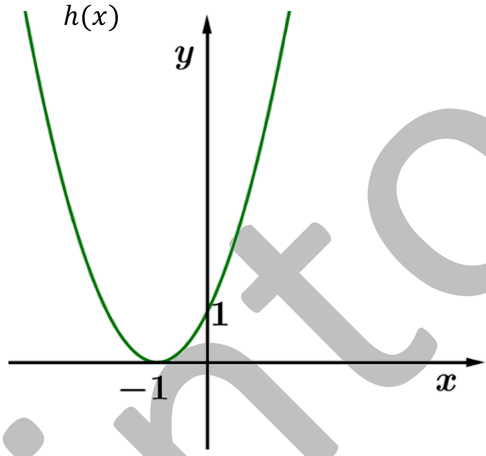
$f(x)$



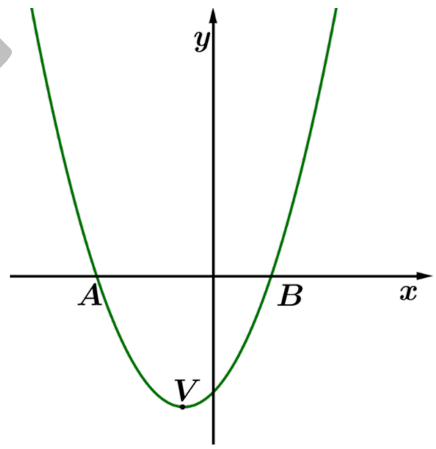
$g(x)$



$h(x)$



5. Considera função f definida por $f(x) = x^2 + x - 2$ e que se encontra representada graficamente:



a) Determina as coordenadas de A e de B.

b) Calcula a área do triângulo $[ABV]$.

c) Determina o contradomínio e uma equação do eixo de simetria.

Sol. a. A(-2,0) B(1,0) b. 3 c. $D' = \left[-\frac{9}{4}; +\infty\right[$ **, eixo simetria** $x = -\frac{1}{2}$

Teste intermédio Maio 2010

6. Sejam a, b e c três números reais.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bc + c$.

Sabe-se que :

- $a > 0$
- a função f tem um único zero, que é o número real 5.

Qual é o contradomínio de f?

A. $]-\infty; 0]$ B. $[0; +\infty[$ C. $]-\infty; 5]$ D. $[5, +\infty[$

7. Resolve em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações:

a. $x^2 - 9 > 0$

b. $-2x^2 + x \leq 1$

c. $-x(x-3) \geq 0$

d. $2(1-3x^2) \leq x$

e. $x^2 + 2x > \frac{x+2}{3}$

f. $\frac{(2x+1)^2}{3} \geq x + 2$

g. $x(x-1) < \frac{(x-1)(x+1)}{2}$

Sol. a. $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ **b.** $\mathbb{R}$ **c.** $[0, 3]$ **d.** $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ **e.** $]-\infty, -2[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ **f.** $\left]-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup [1, +\infty[$ **g.** $\{ \quad \}$

8. Considera a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - mx + 1$, $m \in \mathbb{R}$

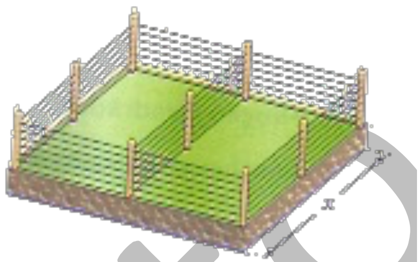
Determina os valores reais de m de modo que a função tenha dois zeros distintos.

9. Uma bola é lançada na vertical de baixo para cima. A altura h, em metros, a que se encontra do solo t segundos após o lançamento é dada por $h(t) = -5t^2 + 30t + 1$

a. Determina a altura a que a bola se encontrava no instante inicial.
b. Calcula h(2) e interpreta o resultado do contexto do problema.
c. Determina a altura máxima atingida pela bola e o instante em que ocorreu.
d. Qual o intervalo de tempo em que a bola se encontrava a mais de 26 metros de altura?
e. Em que instante a bola atingiu o solo?

Sol. a. 1 m b. 41m, c. 46 m aos 3s d. $]1, 5[$ **e. Aprox 6s**

10. O sr. António tem 200m de rede e pretende construir uma vedação com a forma de um retângulo e com uma divisão de modo a formar dois retângulos interiores.



a. Sendo x a largura do retângulo, mostra que área A do retângulo em função de x é dada por $A(x) = \frac{200x-3x^2}{2}$

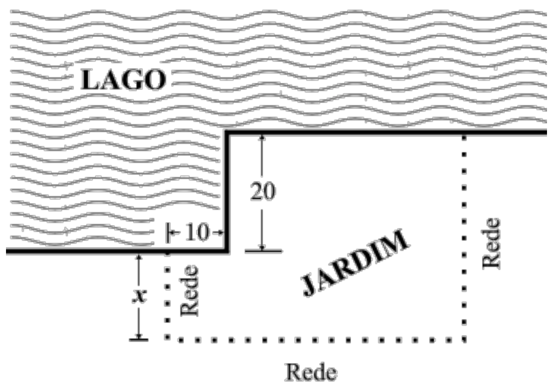
b. Quais as dimensões do retângulo de área máxima? Qual a área máxima?

c. Quais devem ser as dimensões do retângulo para que a sua área seja de $1600m^2$?

Sol. b. 33,3m largura e 50 m de comprimento c. 26,67 por 60m ou quadrado com 40m de lado

Teste intermédio Maio 2008

11. Pretende-se construir um jardim junto a um lago, conforme ilustra a seguinte figura.
Três lados do jardim confinam com o lago e os outros três ficam definidos por uma rede. Pretende-se que lados consecutivos do jardim sejam perpendiculares. As unidades indicadas estão expressas em metros. Tal como a figura mostra, x é a medida, em metros, de um dos lados do jardim. Vão ser utilizados, na sua totalidade, 100 metros de rede.



a. Mostra que a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por: a

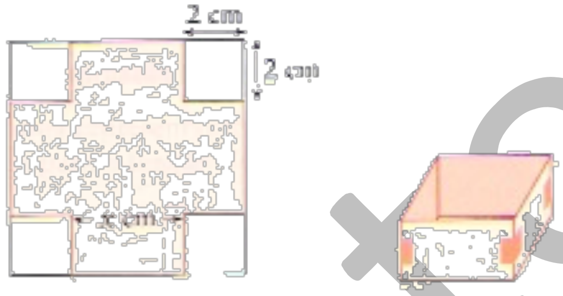
$$A(x) = -2x^2 + 40x + 1400$$

b. Sem recorrer à calculadora, determina o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e determina essa área máxima.

Sol. B. $x = 10$, área máxima $1600m^2$

12. A Margarida tinha uma folha de cartolina com a forma de quadrado.

A cada um dos lados cortou quadrados com 2cm de lado e construiu uma caixa sem tampa, como se mostra nas figuras seguintes.



a. Qual é a altura da caixa?

b. Representando por x a medida do lado da base da caixa, escreve em função de x a capacidade da caixa.

c. Admite que a capacidade da caixa é $200\ cm^2$. Para este caso determina x.

d. Escreve em função de x a área da superfície total da caixa.

e. Determina x de modo que a área da superfície total da caixa seja

   i. $345cm^2$

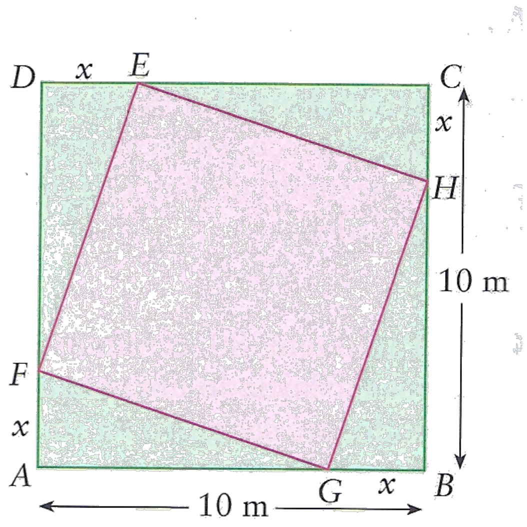
   ii. inferior a $180\ cm^2$

Sol. a. 2cm b. $V = 2x^2$ c. $x = 10$ d. $x^2 + 8x$ e.i. $x = 15$ ii. $]0{,}10[$

13. Num parque há um jardim quadrado e um castelo, esquematizados na figura.

O jardim tem 10 metros de lado.

Admite que $\overline{DE} = \overline{AF} = \overline{GB} = \overline{CH} = x$ metros.



a. Mostra que a área do quadrado $[EFGH]$, em metros quadrados e em função de x, é dada por: $A(x) = 2x^2 - 20x + 100$

b. Determina x de modo que a área do quadrado $[EFGH]$ seja:

   i. Mínima;

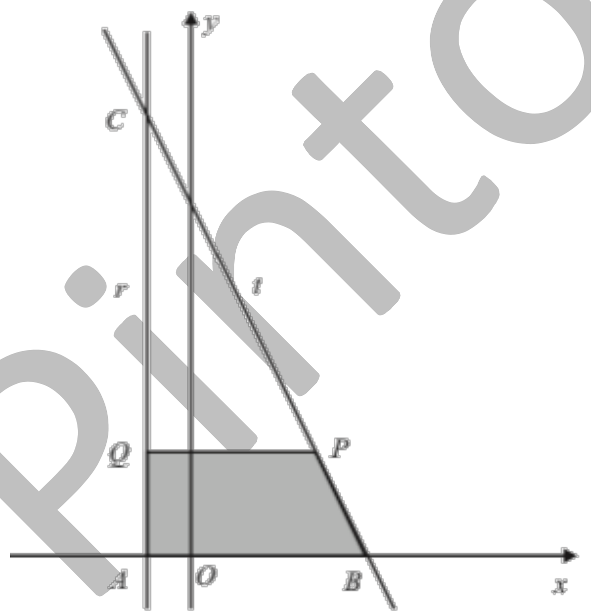
   ii. Não superior a 58 metros,

Sol. b.i 5m ii. $[3, 7]$

14. Na figura seguinte, estão representadas, num referencial o.n. xOy , as retas r e t . Os pontos A e B são, respetivamente, os pontos de intersecção das retas r e t com o eixo Ox. O ponto C é o ponto de intersecção das retas r e t.

    Sabe-se que:

    - a reta r é definida pela equação $x = -1$
    - a reta t é definida pela equação $y = -2x + 8$



Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta [BC], nunca coincidindo com o ponto B, nem com o ponto C, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta [AC], acompanhando o movimento do ponto P, de forma que a ordenada do ponto Q seja sempre igual à ordenada do ponto P

Seja x a abcissa do ponto P.

Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a. Mostre que a área do trapézio [ABPQ] é dada, em função de x, por

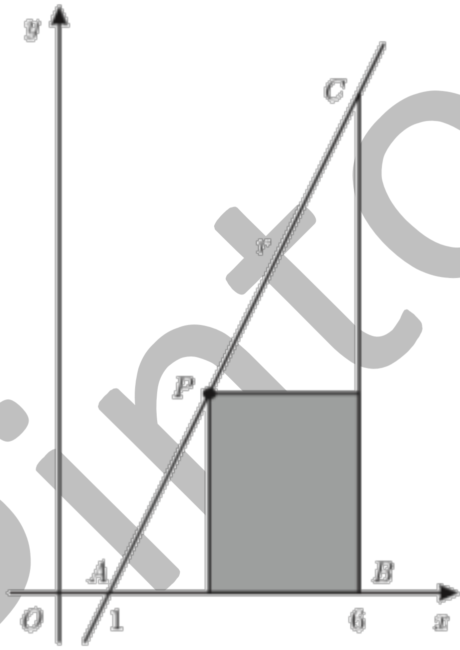
$$S(x) = -x^2 - 2x + 24 \quad , x \in]1,4[$$

b. Determine os valores de x para os quais a área do trapézio [ABPQ] é superior a 21 .
Apresente a sua resposta na forma de um intervalo de números reais.

Sol. b $]-1, 1[$

Teste intermédio Maio 2011

Na figura seguinte, está representada, em referencial o.n. xOy, a reta r, definida pela equação $y = 2x - 2$.



Tal como a figura sugere, A e B são os pontos de coordenadas (1,0) e (6,0), respetivamente, e C é o ponto da reta r de abcissa 6.

Considera que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta $[AC]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto C.

A cada posição do ponto P corresponde um retângulo em que uma das diagonais é o segmento $[BP]$ e em que um dos lados está contido no eixo Ox.

Seja x a abcissa do ponto P ($x \in]1,6[$)

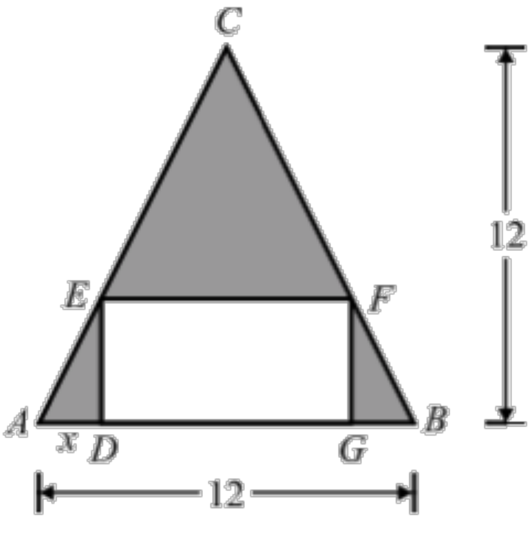
a. Mostra que a área do retângulo é dada, em função de x, por $S(x) = -2x^2 + 14x - 12$

b. Determina os valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8.

Sol. b. $]\mathbf{1}, \mathbf{2}[\cup]\mathbf{5}, \mathbf{6}[$

Teste intermédio Maio 2010

A figura seguinte representa o projeto de um canteiro com forma de um triângulo isósceles ($\overline{AC} = \overline{BC}$)



Nesse triângulo, a base $[AB]$ e a altura relativa a esta base medem ambas 12 metros.

O canteiro vai ter uma zona retangular, destinada à plantação de flores, e uma zona relvada, representada a sombreado na figura.

Seja x a distância, em metros, do ponto A ao ponto D ($x \in]0,6[$)

a. Mostra, que a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, por $S(x) = 4x^2 - 24x + 72$

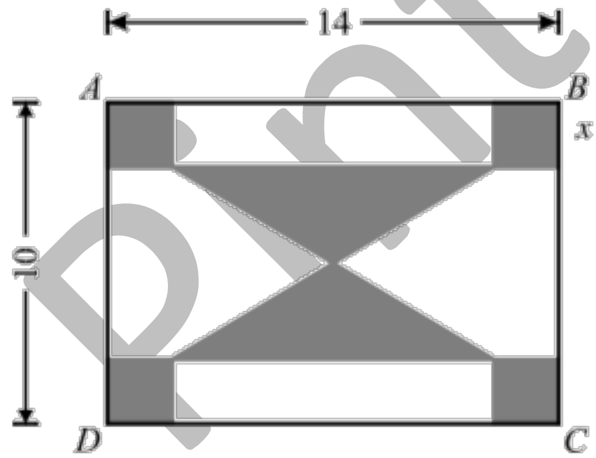
b. Determina o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima e calcula essa área.

c. Determina o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $40\ m^2$.

Sol b. x=3 e área mínima= 36 c. $]\mathbf{0}, \mathbf{2}[\cup]\mathbf{4}, \mathbf{6}[$

Teste intermédio Maio 2009

Na figura está representado um retângulo $[ABCD]$



Este retângulo é o esboço de uma placa decorativa de $14\ cm$ de comprimento por $10\ cm$ de largura e que será constituída por uma parte em metal (representada a cinzento) e por uma parte em madeira (representada a branco).

A parte em metal é formada por dois triângulos iguais e por quatro quadrados também iguais.
Cada triângulo tem um vértice no centro do retângulo $[ABCD]$
Seja x o lado de cada quadrado, medindo em cm $(x \in]0,5[)$

Sem recorrer à calculadora, resolve:

a) Mostra que a área, em cm^2, da parte em metal da placa decorativa é dada, em função de x, por $A(x) = 6x^2 - 24x + 70$

b) Determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima e calcula essa área.

c) Determina o valor de x para o qual a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira.

Sol b. $\boldsymbol{x = 2\ e\ A(2) = 46}$ **c. 4**