

Matemática 12º ano

Complexos – forma trigonométrica-----Prof. Mónica Pinto

1. Escreve na forma $re^{i\theta}$ os números complexos seguintes:

- | | | | |
|--------|----------|-------------|----------------------------|
| a. i | c. $-2i$ | e. $2 + 2i$ | g. $-3 + \sqrt{3}i$ |
| b. 3 | d. -5 | f. $3 - 3i$ | h. $-\sqrt{2} - \sqrt{6}i$ |

Sol. a. $e^{\frac{\pi}{2}i}$ b. $3e^{0i}$ c. $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$ d. $5e^{\pi i}$ e. $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ f. $3\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ g. $2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{6}i}$ h. $2\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$

2. Escreve na forma algébrica os seguintes números complexos:

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| a. $5e^{\pi i}$ | c. e^{0i} | e. $e^{\frac{7\pi}{6}i}$ | g. $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ |
| b. $3e^{\frac{\pi}{2}i}$ | d. $\frac{1}{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}$ | f. $\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{3}i}$ | h. $2e^{\frac{19\pi}{3}i}$ |

Sol. a. -5 b. $3i$ c. 1 d. $-\frac{1}{2}i$ e. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ f. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ g. $1-i$ h. $1 + \sqrt{3}i$

3. Considera os números complexos $z = 2e^{\frac{\pi}{5}i}$ e $w = 3e^{\frac{\pi}{10}i}$.

a. Determina os números complexos seguintes e apresenta os resultados na forma $re^{i\theta}$.

- | | | | |
|---------|--------------|------------------|----------------------------------|
| a. zw | c. \bar{z} | e. $\frac{z}{w}$ | g. $\left(\frac{wi}{z}\right)^2$ |
| b. $-z$ | d. z^{-1} | f. z^7 | h. $\frac{(w^{10})}{z}$ |

b. Determina os seguintes números reais:

- | | | | |
|------------|-------------------------------------|---|-------------------------|
| a. $Re(z)$ | d. $ zw $ | f. $ w^5 $ | h. $Arg(\bar{w}z^{-1})$ |
| b. $Im(z)$ | e. $\left \frac{\bar{z}}{w}\right $ | g. $Arg\left(\frac{w^5}{z^{10}}\right)$ | |
| c. $ -z $ | | | |

Sol. I. a. $6e^{\frac{3\pi}{10}i}$ b. $2e^{\frac{6\pi}{5}i}$ c. $2e^{-\frac{\pi}{5}i}$ d. $\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{5}i}$ e. $\frac{2}{3}e^{\frac{\pi}{10}i}$ f. $128e^{\frac{7\pi}{5}i}$ g. $\frac{9}{4}e^{\frac{4\pi}{5}i}$ h. $\frac{59049}{2}e^{-\frac{4\pi}{5}i}$

II. a. $2\cos\frac{\pi}{5}$ b. $3\sin\frac{\pi}{10}$ c. 2 d. 6 e. $\frac{2}{3}$ f. 243 g. $\frac{\pi}{2}$ h. $\frac{17}{10}\pi$

4. Sem utilizar a calculadora, efetua as operações seguintes em \mathbb{C} e apresenta os resultados na forma trigonométrica.

- | | | |
|---|---|---|
| a. $(1+i) \times \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$ | c. $-i^3 \left(\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2$ | e. $\left(\frac{-1+i}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}\right)^{12}$ |
| b. $1-i + \left(e^{\frac{5\pi}{3}i}\right)^9$ | d. $\frac{-2ie^{\frac{\pi}{6}i}}{1+\sqrt{3}i}$ | |

Sol. a. $6e^{\frac{\pi}{3}i}$ b. $e^{\frac{3\pi}{2}i}$ c. $3e^{\pi i}$ d. $e^{\frac{4\pi}{3}i}$ f. $\frac{1}{64}e^{\pi i}$

5. Mostra que :

a. $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = e^{2\theta i}$

b. $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{-\cos \theta + i \sin \theta} = e^{(2\theta - \pi)i}$

c. $\frac{\sin \theta + i \cos \theta}{\cos \theta + i \sin \theta} = e^{\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)i}$

6. Considera os números complexos $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = e^{\frac{\pi}{7}i}$.

a. Determina $\frac{z_1 + i^{31} - 4(z_2)^7}{2 - i}$ e apresenta o resultados na forma algébrica.

b. Determina $(z_1)^2 \times (-\bar{z}_2)$ e apresenta o resultado na forma trigonométrica.

Sol. a. $2 + i$ b. $2e^{\frac{19\pi}{14}i}$

7. Determina o menor número natural n de modo que:

a. $\left(2e^{\frac{\pi}{3}i} \times 3e^{\frac{\pi}{12}i}\right)^n$ seja um imaginário puro.

b. $\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}\right)^n$ seja um número real negativo.

Sol. a. 2 b. 12

8. Determina os números r e θ , ($r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \mathbb{R}$) tais que :

a. $(2e^{\theta i}) \left(r e^{\frac{\pi}{5}i}\right) = 8 e^{\frac{6\pi}{5}i}$

b. $\frac{r e^{\pi i}}{2 e^{\frac{\pi}{3}i}} = 3 e^{(\theta + \frac{\pi}{2})i}$

c. $\left(r e^{\frac{5\pi}{12}i}\right)^4 = \frac{16}{e^{\theta i}}$

Sol. a. $r = 4 \wedge \theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b. $r = 6 \wedge \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d. $r = 2 \wedge \theta = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9. Determina:

a. As raízes quartas da unidade.

b. As raízes quintas de $32e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

c. As raízes quadradas de $-4i$.

Sol. a. $\{e^{0i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}\}$ b. $\{2e^{\frac{\pi}{6}i}, 2e^{\frac{17\pi}{30}i}, 2e^{\frac{29\pi}{30}i}, 2e^{\frac{41\pi}{30}i}, 2e^{\frac{53\pi}{30}i}\}$ c. $\{2e^{\frac{3\pi}{4}i}, 2e^{\frac{7\pi}{4}i}\}$

10. Resolve ,em \mathbb{C} , as condições seguintes:

a. $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^2 z = 2 + 2i$

c. $z^3 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

e. $z^2 = 2\bar{z}$

b. $z^6 = 1$

d. $z^2 = -4ie^{\frac{\pi}{4}i}$

f. $2z^2\bar{z} = i$

Sol. a. $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}$ b. $e^{0i}, e^{\frac{\pi}{3}i}, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{\pi i}, e^{\frac{4\pi}{3}i}, e^{\frac{5\pi}{3}i}$ c. $\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{12}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}, \sqrt[3]{2}e^{\frac{17\pi}{12}i}$ d. $2e^{\frac{7\pi}{8}i}, 2e^{\frac{15\pi}{8}i}$ e. $0, 2, 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$ g. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}i$

11. Considera o número complexo $w = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Sabe-se que w é uma das raízes sextas de um certo número complexo z .

Determina z e indica as outras raízes sextas de z .

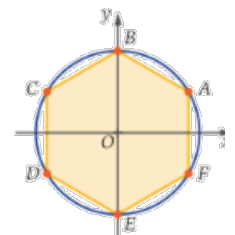
Sol. $-64, 2e^{\frac{7\pi}{6}i}, 2e^{\frac{3\pi}{2}i}, 2e^{\frac{11\pi}{6}i}, 2e^{\frac{\pi}{6}i}, 2e^{\frac{\pi}{2}i}$

12. Considera o hexágono regular $[ABCDEF]$ cujo centro é a origem O do referencial ortonormado representado.

Sabe-se que C é o afixo do número complexo $z = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

a. Determina as coordenadas dos restantes vértices do hexágono.

b. Indica uma equação cujas soluções sejam os números complexos cujos afixos são os vértices do hexágono.



Sol. a. $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), B(0,3), D\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), E(0,-3), F\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, b. $z^6 = -729$

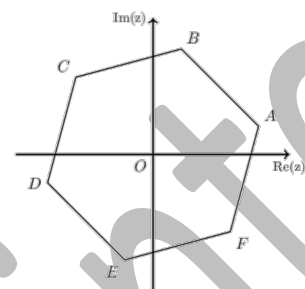
13. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n do complexo z . O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E ?

A. $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

B. $4e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

C. $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$

D. $4e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$



Exame - 2014, 1ª Fase

Sol. $-1 + 3i$

14. Sabe-se que $3 + i$ é uma das raízes quartas de um número complexo w . Determina, na forma algébrica, a raiz quarta de w cuja imagem geométrica, no plano complexo, pertence ao segundo quadrante.

15. Considera o complexo $w = 8 + 6i$. w é uma raiz cúbica de um certo número complexo z . Determina, na forma algébrica, as outras raízes cúbicas de z .

Sol. a. $-4 - 3\sqrt{3} + (-3 + 4\sqrt{3})i$

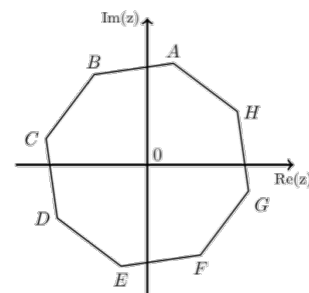
16. Considera, em \mathbb{C} , um número complexo w . No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura ao lado. Os vértices desses polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo. Qual dos números complexos seguintes tem como imagem o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

A. $-w$

B. $w + 1$

C. $i \times w$

D. $i^3 \times w$



Exame - 2011, Ép. especial

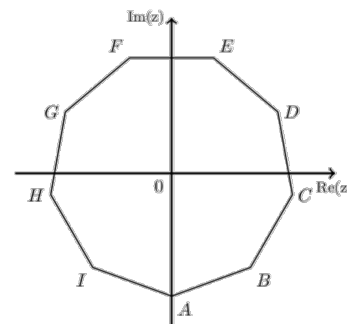
17. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z . O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$. Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F ?

A. $3e^{i\left(\frac{7\pi}{18}\right)}$

B. $3e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)}$

C. $3e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

D. $3e^{i\left(\frac{5\pi}{9}\right)}$



Exame - 2012, 2ª Fase

Soluções escolha múltipla: 13. D 16.C 17. B