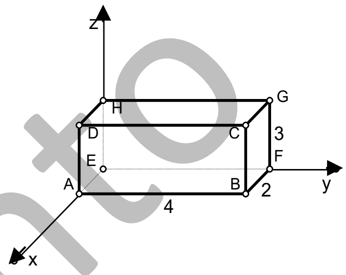
Ficha de Exercícios
Matemática A – 10º ano de escolaridade. **Prof. Jorge Pinto**

Tema: Geometria Analítica **Subtema**: Geometria Analítica no espaço

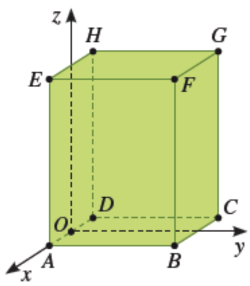
1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o paralelepípedo [ABCDEFGH] de dimensões 4, 3 e 2, representado na figura ao lado.



   a) Indica as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.
   b) Escreve uma condição que defina o plano ABC.
   c) Escreve uma condição que defina a reta CG.
   d) Escreve uma condição que defina o segmento de reta $[DC]$.
   e) Escreve as coordenadas do ponto simétrico de C relativamente ao plano xOy.

Sol. a.)*A* (2, 0, 0) , *B* (2, 4, 0), *C* (2, 4, 3), *D* (2, 0, 3), *E* (0, 0, 0), *F* (0, 4, 0), *G* (0, 4, 3), *H* (0, 0, 3) b) $x = 2$ c)$y = 4 \wedge z = 3$. d))$x = 2 \wedge z = 3 \wedge 0 \leq y \leq 4$.
e) *C'* (2, 4, -3)

2. No referencial Oxyz está representado um paralelepípedo reto:



   - a face [AEHD] está contida no plano $y = 0$;
   - a origem do referencial é o ponto médio de $[\mathrm{AD}]$;
   - F tem coordenadas $(1, 3, 5)$ e A e D pertencem ao eixo Ox .

   a) Indica as coordenadas dos outros vértices do paralelepípedo.
   b) Escreve uma condição que defina:
      I. o plano FGC ;
      II. a reta AB ;
      III. a aresta $[\mathrm{FG}]$
   c) Determina uma equação reduzida da superfície esférica de centro em B e que passa por G .
   d) Determina uma equação do plano mediador de $[\mathrm{CE}]$.

   Apresenta a equação na forma $ax + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + \mathrm{d} = 0$, em que *a* , *b* , *c* e *d* são números reais.

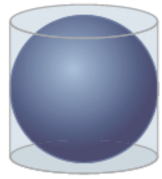
a.$A(1,0,0); B(1,3,0); C(-1,3,0); D(-1,0,0); E(1,0,5); G(-1,3,5) e\ H(-1,0,5)$ b. I. $y = 3$ II. $x = 1 \wedge z = 0$
III. $y = 3 \wedge z = 5 \wedge -1 \leq x \leq 1$ b. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 29$ c.$2x - 3y + 5z - 8 = 0$

3. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $A\ (3,2,1), B\ (2,-1,3)$ e $C\ (3,-4,2k)$.

   a) Determine o valor de *k,* tal que a distância de A a C é 10.
   b) Escreva a equação da superfície esférica de centro B e que contém A.
   c) Determine as coordenadas do ponto do semieixo positivo Oy cuja distância a A é igual ao raio da superfície esférica determinada em b.

Sol. a. $k = -\frac{7}{2} \vee k = \frac{9}{2}$ b. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$ c. P(0,4,0)

4. Num referencial ortonormado Oxyz, a condição $x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 6z \leq 3$ define uma esfera inscrita num *cilindro*. Seja C o centro da esfera e h a altura do cilindro. Então:



(A) $\mathrm{C}(-2, 0, 3)$ e $h = 4$. (B) $\mathrm{C}(2, 0, -3)$ e $h = 4$ (C) $\mathrm{C}(2, 0, -3)$ e $h = 8$ (D) $\mathrm{C}(-2, 0, 3)$ e $h = 8$

Sol c.

5. Considera, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0$$

a. Indica o centro C e o raio da superfície esférica.

b. Determina expressões analíticas que definam a interseção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:

i. o eixo Oz;

ii. o plano de equação $z = 4$;

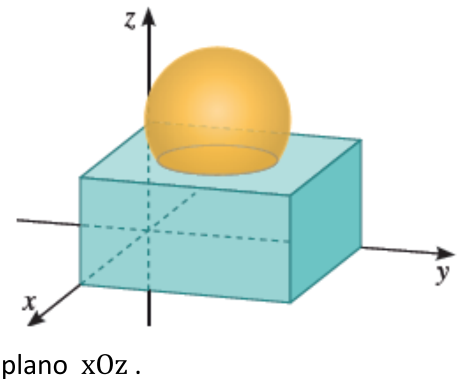
iii. o plano de equação $y = -4$.

c. Prove que o ponto $A(0, 0, 2)$ pertence à superfície esférica e determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

Sol. a. Centro: C(2, -1, 4), Raio: r = 3 b. i Pontos: (0, 0, 2) e (0, 0, 6). ii. Circunferência de centro em (2, -1, 4) e raio 3, contida no plano z = 4 iii. Ponto: (2, -4, 4). c. r=$\overline{AC} = 3$. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$

6. Na figura está representado, num referencial ortonormado Oxyz, um sólido que pode ser decomposto num prisma quadrangular regular e num sólido que é parte de uma esfera. As duas partes em que o sólido representado pode ser decomposto têm em comum um círculo de raio 8, cujo centro é também o centro da base superior do prisma.

Sabe-se ainda que:



- uma das arestas do prisma está contida no eixo Ox, outra no eixo Oy e outra no eixo Oz;
- um dos vértices do prisma tem coordenadas $(30, 30, 15)$;
- o ponto do sólido que tem cota máxima igual a 31.

a) Defina, por meio de uma condição, a face do prisma que está contida no plano xOz.

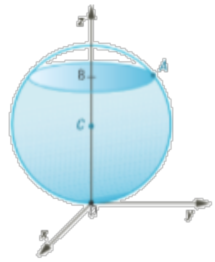
b) Escreva uma equação do plano mediador da diagonal espacial do prisma que tem a origem do referencial como um dos extremos. Apresente a sua resposta na forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} = \mathrm{d}$, em que a, b, c e d designam números reais.

c) Determine o raio da esfera e as coordenadas do seu centro, e escreva a sua inequação reduzida.

Adaptado do GAVE: Série Problemas Matemática A do 10.º ano

Sol. a.$0 \leq x \leq 30 \wedge 0 \leq z \leq 15 \wedge y = 0$ b.$4x + 4y + 2z = 135$ c. Esfera:$(x-15)^2 + (y-15)^2 + (z-21)^2 \leq 100$

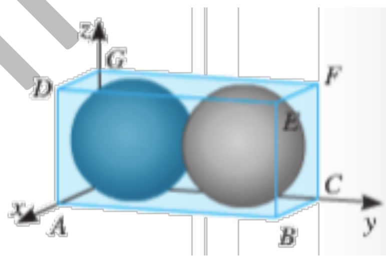
7. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, encontra-se representado um reservatório esférico de raio 5 e tangente ao plano coordenado xOy. A cota da superfície superior do líquido é 8.



   a) Determina as coordenadas do ponto A do reservatório, sabendo que este pertence ao plano yOz e à superfície do líquido;
   b) Define a superfície superior do líquido através de uma condição;
   c) Determina as coordenadas dos pontos de interseção da reta definida pelo sistema $x = 2 \wedge z = 3$ com a superfície esférica que delimita o reservatório.

Sol. a. $\overline{AB} = 4, A(0,4,8)$ b. $x^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \wedge z = 8$ c) $(2\,,\sqrt{17},3)$ e $(2\,,-\sqrt{17},3)$

8. No referencial o.n. com origem O, estão representados um prisma reto e duas esferas geometricamente iguais tangentes entre si e tangentes às faces do prisma.
   O prisma tem a face $[AOGD]$ contida em xOz e a face $[BCEF]$ contida no plano de equação $y = 20$.
   a) Escreve uma inequação que defina a esfera à esquerda na figura.
   b) A reta definida pelo sistema $y = 15 \wedge z = 10$, interseta uma da superfícies esféricas num ponto. Determina as coordenadas desse ponto.
   c) Determina o perímetro do círculo que é a interseção da esfera à esquerda na figura com o plano de Equação $x = 7$



Sol. a. $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 \leq 25$, b. $(x-5)^2 + (y-15)^2 + (z-5)^2 = 25,$ $P(5,15,10)$
d. círculo $(y-5)^2 + (z-5)^2 \leq 21 \ \wedge x = 7$, $Perímetro = 2\sqrt{21}\pi$

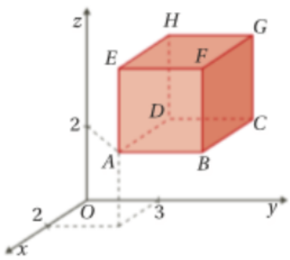
9. Considera , fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica S de equação:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$$

   a) Identifica a interseção da superfície esférica S com o plano de equação $x = 5$.
   b) Determina os valores de a para os quais o plano de equação $y = a$ tem interseção não vazia com a superfície esférica.
   c) Determina para que valores reais de b a interseção da superfície esférica S com o plano de equação $z = b$ é uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

Sol. a. circunferência C(5,-2,3) e r=3 contida no plano $x = 5$; b. $[-2-\sqrt{10}\,, -2+\sqrt{10}]$ c. $3 \pm \sqrt{2}$

10. na figura está representado, num referencial do espaço, o cubo$[ABCDEFGH]$ de aresta 3.
   As faces do cubo são paralelas aos planos coordenados e $A(2\,,3\,,2)$.
   a) Escreve as coordenadas dos restantes vértices do cubo.
   b) Determina as coordenadas:
      i. De M, ponto médio de $[AG]$;
      ii. Do vetor $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}$;
      iii. Do ponto $A + \overrightarrow{BG}$.
   c) Calcula:
      i. $\|\overrightarrow{AG}\|$
      ii. $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EF}\|$



Sol.a) B(2,6,29; C(-1,6,2) ; D(-1,3,2) ; E(2,3,5); F(2,6,5); G(-1,6,5) e H(-1,3,5) bi) $M\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ii) $(-3,3,3)$ iii) H(-1,3,5) ci)$3\sqrt{3}$ ii)$3\sqrt{5}$

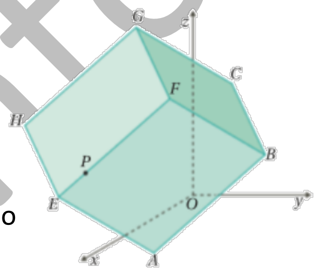
11. Fixado um referencial ortonormado do espaço e para um dado número real k, os vetores $\vec{u}(5k+8, 0, 5)$ e $\vec{v}(2, k^2-4, k-3)$ são colineares.
Determina o valor de K .

Sol. $k=-2$

12. Considere, fixado um referencial ortonormado do espaço, o vetor $\vec{u}(-1,-1,1)$.
Determina as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ colinear com $\vec{u}$ e de norma $\sqrt{2}$.

Sol. $\vec{v}\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ou $\vec{v}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

13. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$, num referencial ortonormado $Oxyz$ (o ponto D não está representado na figura).
Admite que as coordenadas dos pontos C , G e E são $(2,3,6)$, $(6,1,10)$ e $(12,1,4)$, respetivamente.



a) Determine as coordenadas do ponto A .
b) Seja r a reta CG.
   i. Determine uma equação vetorial da reta r
   ii. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano yOz .
c) Sabe-se que:
$x^2+y^2+z^2-8x+2y-4z=15$
é uma equação da superfície esférica com centro no ponto D .
   I. Determine as coordenadas do ponto D.
   II. O ponto H pertence à superfície esférica? Justifique.

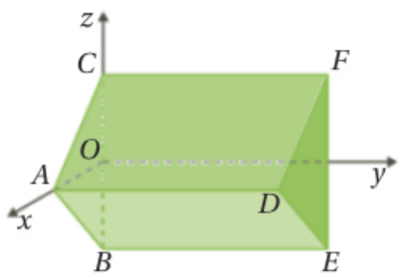
d) Determine a área da secção produzida no cubo pelo plano $[PGC]$ em que P é o ponto de $[EF]$ tal que $\overline{EP}=1,5$.

Sol. a) $A(8,3,0)$ bi) $(x,y,z)=(2,3,6)+k(-4,2,-4), k \in \mathbb{R}$ ii) (0,4,4) ci) (4,-1,2) ii) sim d) 45 u.a

14. Fixado um referencial ortonormado do espaço, considere a superfície esférica S de equação $x^2+y^2+z^2-2x-6y=0$
a) Determine o centro e o raio da superfície esférica .
b) Determine as coordenadas dos pontos de interseção da superfície esférica S com o eixo Oy.
c) Caracterize a interseção da superfície esférica s com o plano de equação $x=4$.

Sol a) $C(1,3,0)$ $e\ r=\sqrt{10}$ b) (0,0,0) e (0,6,0) c) circunferência de centro (4,3,0) e raio 1 contida no plano de equação $x=4$

15. Na figura está representado, num referencial ortonormado do espaço, o prisma triangular não regular $[ABCDEF]$.
Sabe-se que:



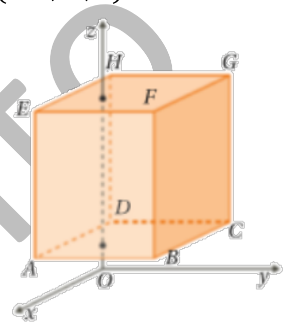
- A base $[ABC]$ está contida no plano xOz ;
- A face $[BEFC]$ está contida no plano yOz ;
- As aresta laterais do prisma são perpendiculares às bases ;
- O prisma tem altura igual a 8 ;
- $x^2+y^2+z^2-8x-16y+55=0$ é uma equação da superfície esférica S que que tem centro no ponto D e que contém os pontos E e F.

a) Mostre que a superfície esférica S tem centro no ponto de coordenadas (4,8,0) e raio igual a 5 e, de seguida determina as coordenadas dos vértices do prisma;
b) Determina o volume do prisma;

c) Determina uma equação da superfície esférica de centro no ponto F e que passa no ponto A;
d) Determine as coordenadas do ponto do eixo Ox que pertence ao plano mediador de $[DF]$;
e) Define analiticamente a interseção da superfície esférica S com o plano EFB e determina o seu perímetro.

Sol. $A(4,0,0)$; $B(0,0,-3)$; $C(0,0,3)$ $D(4,8,0)$; $E(0,8,-3)$ e F $(0,8,3)$ b) 96 u.v c) $x^2 + (y-8)^2 + (z-3)^2 = 89$ d) $\left(\frac{7}{8}, 0, 0\right)$ d) circunferência de centro $(0,8,0)$ e raio 3 contida no plano de equação $x = 0$

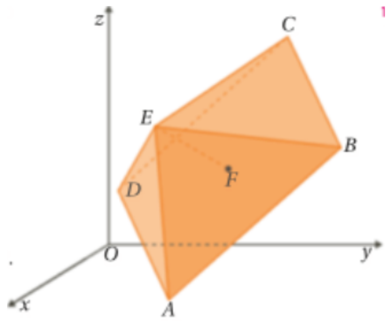
16. No referencial ortonormado $Oxyz$ está representado o prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$ de faces paralelas aos planos coordenados. O ponto A tem coordenadas $(2,-1,1)$ e o ponto $G(-2,3,6)$.



a) Escreve as coordenadas dos pontos D , E , F e H .
b) Define por uma condição:
   i. O plano que contém a face $[BCGF]$.
   ii. O prisma
c) Identifica a aresta definida por:
   $x = 2 \wedge y = -1 \wedge 1 \leq z \leq 6$
d) Escreve uma equação do plano mediador do segmento de reta $[FD]$.
e) Determine um sistema de equações paramétricas da reta que passa pelos pontos médios de $[BF]$ e $[CG]$.

Sol. $B(2,3,1)$; $C(-2,3,1)$; $D(-2,-1,1)$; $E(2,-1,6)$; $F(2,3,6)$ e $H(-2,-1,6)$ bi) $y = 3$ ii) $-2 \leq x \leq 2 \wedge -1 \leq y \leq 3 \wedge 1 \leq z \leq 6$ c)$[AE]$ d) $8x + 8y + 10z - 43 = 0$ e)$\begin{cases} x = 2 + 4k \\ y = 3 \\ z = \frac{7}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

17. Na figura está representada, num referencial ortonormado $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.
Sabe-se que:



- O ponto F é o centro da base da pirâmide;
- $\overrightarrow{EC}(-5,1,1)$ e $\overrightarrow{EA}(1,1,-5)$
- $D(-2,-1,1)$

a) Mostre que o vetor $\overrightarrow{EF}$ tem coordenadas $(-2, 1, -2)$
b) Determine o volume da pirâmide.

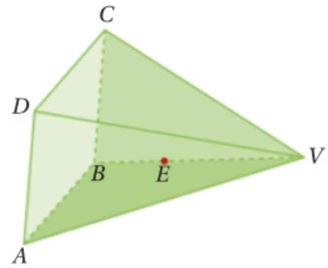
Sol. b)36 u.v

18. Considera, num referencial $Oxyz$, o ponto $A(2,0,-1)$ e a reta r definida por:
$(x,y,z) = (1,4,-1) + k(1,-4,3)$, $k \in \mathbb{R}$

a) Determina um sistema de equações paramétricas da reta que passa por A e é paralela ao eixo Ox.
b) Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano yOz.
c) Determina as coordenadas dos pontos da reta r cuja distância à origem do referencial é igual a 12.
d) Determina as coordenadas dos pontos de interseção da reta r com a superfície esférica de centro em A e raio 3.

Sol. a) $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ b) $(0,8,-4)$ c) $P(4,-8,8)$ ou $P\left(-\frac{8}{13}, \frac{136}{13}, -\frac{76}{13}\right)$ d) $(2,0,2)$ e $\left(\frac{17}{13}, \frac{36}{13}, -\frac{1}{13}\right)$

19. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, um pirâmide quadrangular regular de base $[ABCD]$ e vértice V.
Sabe-se que:



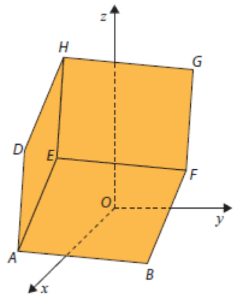
- $A(-3\,,0\,,1)$
- $B(-1\,,4\,,5\,)$
- $\overrightarrow{AC}(-2\,,2\,,8)$
- O ponto $E(-4{,}5{,}4)$ pertence à aresta $[BV]$

a) As coordenadas dos pontos C e D
b) Uma equação vetorial da reta BE;
c) As coordenadas do vértice V , sabendo que pertence ao plano de equação $x = -10$

Sol a) $C(-2,-4,-4)$ $D(-7,-2{,}5)$ b) $(x,y,z) = (-1{,}4{,}5) + k(-3{,}1,-1)\,, k \in \mathbb{R}$ c) $V(-10{,}7{,}2)$

20. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto C não está representado na figura).
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (11, −1, 2);
- o ponto B tem coordenadas (8, 5, 0);
- o ponto D tem coordenadas (5, −3, 5);
- o ponto E tem coordenadas (13, 2, 8).

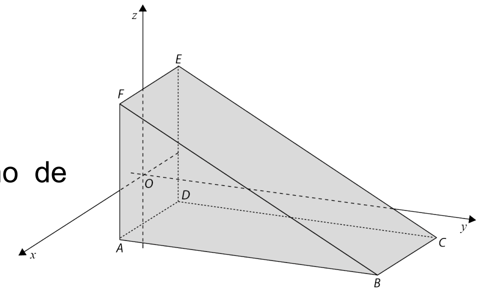


a) Determine as coordenadas do ponto C.
b) Determine o volume do cubo.
c) Escreva um sistema de equações paramétricas da reta que passa em E e é paralela à reta BD.
d) Escreva uma condição que defina a esfera inscrita no cubo e que seja tangente a todas as suas faces.
e) Determine o valor de a para o qual o ponto $P(1 + 2a, -a, -a)$ pertence à reta AE.

Sol. a) $(2, 3, 3)$ b) $V = 343$ c) $\begin{cases} x = 13 - 3k \\ y = 2 - 8k \\ z = 8 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ d) $\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 \leq \frac{49}{4}$ e) $a = 4$

21. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:



- $[ABF]$ e $[DCE]$ são triângulos retângulos;
- $[ADEF]$ é um quadrado de lado 4 e está contido no plano de equação $y = 2$;
- $[ABCD]$ está contido no plano xOy;
- o vértice C tem coordenadas (2, 10, 0).

a) Determine as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

b) Recorrendo às letras da figura, calcule:

i. $C + \overrightarrow{BF}$

ii. $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{FA}$

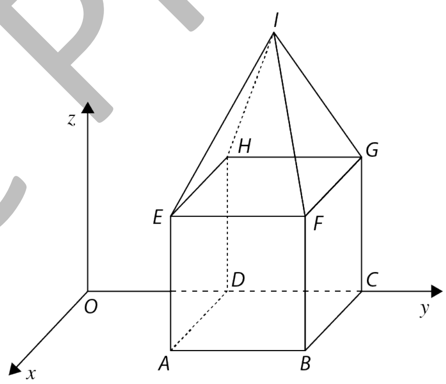
c) Defina por uma equação o plano que contém os pontos F e E e é paralelo a xOy.

d) Determine uma equação do plano mediador de $[EC]$. Apresente a sua resposta na forma $ax + by + cz + d = 0,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

e) Defina por uma condição a esfera com centro no ponto médio de $[AC]$ e que é tangente ao plano xOz.

Sol. a) $C(2,10,0); A(6,2,0); B(6,10,0); D(2,2,0); E(2,2,4); F(6,2,4)$ bi) E bii) $\overrightarrow{CE}$; **c)** $z = 4$; d) $2y - z - 10 = 0$; e) $(x-4)^2 + (y-6)^2 + z^2 \leq 36$

22. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um sólido constituído por um cubo de aresta 3 e uma pirâmide de altura $\sqrt{5} + 1$.



Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy;
- a aresta $[DC]$ está contida no eixo Oy;
- o ponto D tem coordenadas $(0, 4, 0)$.

a) Sabendo que os pontos de coordenadas $(3, 4, 0)$ e $(0, 7, 0)$ são vértices do cubo, qual é o plano mediador do segmento de reta cujos extremos são estes dois vértices?

(A) ABC **(B)** ACE **(C)** BDF **(D)** BCI

b) Determine uma equação vetorial da reta que passa no vértice da pirâmide e que tem a direção do vetor $\overrightarrow{AG}$.

c) Defina por uma condição:

i. o plano que contém o vértice da pirâmide e é paralelo ao plano xOz;

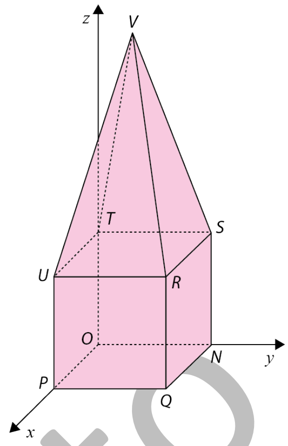
ii. a reta HG;

iii. o conjunto de pontos do espaço que estão a uma distância do ponto F inferior ou igual a 2 unidades.

d) Determine o valor exato do volume do sólido.
Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{c}$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Sol. a) (C) b) $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{3\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) + k(-3,3,3), k \in \mathbb{R}$; ci) $y = 4 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2}$; ii) $x = 0 \ \wedge \ z = 3$; iii) $F(3,7,3)$; $(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z-3)^2 \leq 4$ d) $\text{Volume}_{\text{sólido}} = \text{Volume}_{\text{cubo}} + \text{Volume}_{\text{pirâmide}} = 30 + 3\sqrt{5}$

23. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o sólido [*NOPQRSTUV*]. Este sólido pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se ainda que:



- o vértice P pertence ao eixo Ox;
- o vértice N pertence ao eixo Oy;
- o vértice T pertence ao eixo Oz;
- o vértice R tem coordenadas $(3, 3, 3)$;
- o volume do sólido é 42 u.v.

a) Prove que as coordenadas do ponto V são $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 8\right)$.

b) Escreva uma equação vetorial da reta que passa em V e que tem a direção do eixo das ordenadas.

c) Escreva um sistema de equações paramétricas da reta VQ.

d) Seja A o ponto de coordenadas $(k, k^2, k-1)$, com $k \in \mathbb{R}$. Determine os valores de k de modo que o ponto A pertença ao plano mediador de $[PS]$.

e) Escreva uma condição que defina a superfície esférica de diâmetro $[UV]$.

f) Seja V_1 o volume da esfera inscrita no cubo representado na figura e V_2 o volume da esfera circunscrita a esse mesmo cubo. Determine $\frac{V_1}{V_2}$, apresentando o valor pretendido na forma de uma fração com o denominador racional.

Sol. b) $(x,y,z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 8\right) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$ c) $\begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}k \\ y = 3 + \frac{3}{2}k, k \in \mathbb{R} \\ z = -8k \end{cases}$; d) $-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{59}{8}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{9}$