Ficha de Exercícios
Matemática A – 10º ano de escolaridade **Prof. Jorge Pinto**

Tema: Álgebra **Subtema**: Polinómios

1. Considera os seguintes polinómios

$P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ e $Q(x) = -3x + 2$

Calcula, apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido e ordenado:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) \times Q(x)$

Sol. a) $2x^2 - 6x + 7$ b) $2x^2 + 3$ c) $-6x^3 + 13x^2 - 21x + 10$

2. Considera os polinómios

$A(x) = -x^2 - 3x + \dfrac{1}{2}$; $B(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{3}$; $C(x) = x - 1$

Calcula, apresentando o resultado na forma de polinómio reduzido e ordenado:

a) $2A(x) - 3B(x)$

b) $B(x) \times C(x)$

c) $[C(x)]^2 - B(x)$

d) $-3[C(x)]^3$

Sol. a) $-11x^2 - 6x + 2$ b) $3x^3 - 3x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ c) $-2x^2 - 2x + \frac{4}{3}$ d) $-3x^3 + 9x^2 - 9x + 3$

3. Qual é o menor grau possível do polinómio $A(x) \times B(x)$, se $A(x) = x^m + 3x^4 + 2x - 5$ e $B(x) = 6x^n - x^7$, onde $m > 5$ e $n > 7$?

Sol. 14

4. Considera a divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

Determina o polinómio dividendo $A(x)$ sabendo que os polinómios divisor, quociente e resto são, respetivamente $B(x) = x^3 + x$, $Q(x) = 3x^2 - 4$ e $R(x) = 2x + 5$.

Sol. $A(x) = 3x^5 - x^3 - 2x + 5$

5. Sejam $A(x) = x^{10} - 8x^4 + 6x + 4$ e $B(x) = x^5 - x^3 + 1$.

Determina o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$, aplicando o algoritmo da divisão inteira.

Sol. $(x) = x^5 + x^3 + x - 1$ e $R(x) = -7x^4 - 2x^3 + 5x + 5$

6. Utiliza a regra de Ruffini e determina o quociente e o reto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$, sendo:

a) $\mathrm{A(x)} = 5\mathrm{x}^4 + 8\mathrm{x}^3 - 16$ e $\mathrm{B(x)} = \mathrm{x} + 2$;

b) $A(x) = 8x^3 + 1$ e $B(x) = 2x - 1$.

Sol. a) $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ e $R(x) = 0$ b) $Q(x) = 4x^2 + 2x + 1$ e $R(x) = 2$

7. A área de um retângulo é dada pelo polinómio $A(x) = 6x^2 - x - 12$.
Determina um polinómio $C(x)$ que represente a altura do retângulo sabendo que a base é dada pelo polinómio $B(x) = 3x + 4$.

Sol. $C(x) = 2x - 3$

8. Determina o resto da divisão de $A(x) = 3x^3 + \frac{1}{2}x + 1$ por $B(x) = x - 2$, sem efetuar a divisão.

Sol. 26

9. Quais dos seguintes números: -3, -2, -1, 0, 1, 2 e 3 não são zeros do polinómio: $A(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x$.

Sol. -3 e 1

10. Determina os valores de k tal que $A(x) = (kx)^2 + (2k + 3)x + 13$, com $k \in \mathbb{R}$ é divisível por $B(x) = x + 4$.

Sol. $k = \frac{1}{4}$

11. Mostra que $P(x) = x^{n+2} + 3x^{n+1} + 2x^n$, com $n \in \mathbb{N}$ é divisível por $x + 1$.

Sol. Se $P(x)$ é divisível por $x + 1$ então, pelo teorema do resto, basta verificar que $P(-1) = 0$.
Se n é par, $P(-1) = (-1)^{n+2} + 3 \times (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n = 1 + 3 \times (-1) + 2 \times 1 = 0$, então $P(x)$ é divisível por $x + 1$ quando n é par.
Se n é ímpar, $P(-1) = (-1)^{n+2} + 3 \times (-1)^{n+1} + 2 \times (-1)^n = -1 + 3 \times 1 + 2 \times (-1) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $x + 1$ quando n é ímpar.
Logo, $P(x)$ é divisível por $x + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

12. Determina o polinómio $P(x)$ do 3.º grau que admite os zeros simples $-\frac{1}{2}$, -3 e 6 e cujo resto da divisão por $x + 1$ é igual a 14.

Sol. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 39x - 18$

13. Considera a função polinomial p definida por $p(x) = -2x^{2n+1} - x^{2n} + x^{n+1} - 1$ com $n \in \mathbb{N}$.
Se n for par, então o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é :
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

Sol. B

14. Determina para que valores reais de a e b o polinómio $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ dividido por $x - 1$ dá resto -4 e dividido $x + 1$ por dá resto 2.

Sol. $a = 1$ e $b = -1$

15. Determina os números reais a e b , de modo que o polinómio $P(x) = 2x^3 - 3ax + 2x + b$ seja divisível por $x - 1$ e que dividido por $2x + 4$ dê resto 3.

Sol. $a = -3$, $b = -13$

16. Indica a multiplicidade das raízes do polinómio $P(x) = 2(x + 1)^3(x - 5)^2(x - 2)$.

Sol. -1 , m: 3 ; 5 m: 2 ; 2 m: 1

17. Decompõe em fatores os seguintes polinómios:

a) $A(x) = x^3 + 2x^2 + x$;

b) $B(x) = x^3 - 9x;$

c) $C(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 17x - 10$, sabendo que 1 é raiz dupla de $C(x)$.

Sol. a) $A(x) = x(x+1)^2$ b) $B(x) = x(x-3)(x+3)$ c) $C(x) = (x-1)^2(x+2)(x-5)$

18. Considera o polinómio $A(x) = x^7 - 3x^6 - 5x^5 + 7x^4 + 15x^3 + 19x^2 + 21x + 9$.

Sabendo que o polinómio $A(x)$ admite as raízes -1 e 3 com diferentes ordens de multiplicidade, determina o polinómio $B(x)$ sem zeros tal que

$A(x) = (x+1)^m(x-3)^n B(x)$ e identifica os valores de m e n.

Sol .$B(x) = x^2 + 1, m = 3$ e $n = 2$

19. Considera os polinómios $A(x) = x^3 + ax^2 + x + b$, com a e b $\in \mathbb{R}$ e $B(x) = x^2 + 2x$ com duas raízes comuns.

a) Determina os valores de a e de b.

b) Calcula a outra raiz de $A(x)$.

c) Decompões $A(x)$ em fatores.

Sol. a) $a = \frac{5}{2}$ e $b = 0$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $A(x) = x(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

20. Considera o polinómio $P(x) = x^3 + bx + c$, onde b e c são números reais.

Sabe-se que $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e -3 é um zero simples de $P(x)$.

a) Determina os valores reais de b e c.

b) Fatoriza o polinómio $P(x)$.

c) Resolve a equação $P(x) = 6$.

Sol. a) $b = -7, c = 6$ b) $(x-2)(x+3)(x-1)$ c) $\{-\sqrt{7}\ , 0\ , \sqrt{7}\}$

21. Determine o polinómio $A(x)$ de grau 3 e apresente-o na forma reduzida e ordenada, sabendo que:

- 1 é uma raiz de multiplicidade dois de $A(x)$;
- $A(x)$ é divisível por $x + 2$;
- o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x + 3$ é 32.

Sol. $-2x^3 + 6x - 4$

22. Sobre um polinómio P(x) sabe-se que:

- Dividido por $x + 1$ dá resto -1 ;
- Dividido por $x - 2$ dá resto -7

Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x-2)$?

Sol. $R(x) = -2x - 3$

23. Resolve as seguintes equações:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

b) $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

Sol. a. $\{-2, 2\}$ b. $\{-1,5\}$

24. Resolve as seguintes inequações

a) $(x-2)(7+3x) > 0$

b) $(x^2+3)(2x-1) < 0$

c) $(x^2-4x-5)(x^2-9) \leq 0$

d) $x^3 + 5x^2 - 6x > 0$

e) $-x^3 + 2x^2 + 15x - 36 < 0$ (4 é uma das raízes)

Sol. a. $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ b. $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ c. $[-3,-1] \cup [3,5]$ d. $]-6,0[\cup]1,+\infty[$ e. $]-4,+\infty[\setminus \{3\}$

25. Considere o polinómio $P(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2$.

a) Sabendo que 3 é uma raiz simples do polinómio, determine as restantes raízes de $P(x)$.

b) Determine o conjunto-solução da condição $P(x) < 0$.

Sol. a) Assim, além de 3, as raízes do polinómio são 0, -2 e 1 b) C.S. $=]-2,0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$

26. Considere os seguintes polinómios:

$A(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x$

$B(x) = x^2 - 2x$

$C(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$

a) Determine o valor exato de $\mathrm{A}(\sqrt{3}) + \mathrm{B}(1-\sqrt{2})$.

b) Determine o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

c) Decomponha o polinómio $A(x)$ num produto de fatores de grau 1, sabendo que -2 é raiz simples do polinómio.

d) Determine o conjunto-solução da condição $A(x) \geq 0$.

e) Determine os valores de a, b e c, sabendo que 3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinómio $C(x)$ e que o resto da divisão de $C(x)$ por $x - 1$ é 6.

Sol. a) $-20 - 15\sqrt{3}$ b) $Q(x) = x^2 + 5x$; $R(x) = -24x$

c) $A(x) = x(x+2)(x^2+x-12)$ d) C.S. $=]-\infty,-4] \cup [-2,0] \cup [3,+\infty[$ e) $a = \frac{3}{2}, b = -9$ e $c = \frac{27}{2}$.

27. Para um certo valor real de k, considere o polinómio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$.

Considere também as seguintes proposições:

(I) Se $k = -6$, então $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

(II) Se $k = 6$, então o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é igual a 12.

Acerca das proposições anteriores, pode concluir-se que:

(A) apenas (I) é verdadeira.

(B) apenas (II) é verdadeira.

(C) são ambas verdadeiras.

(D) são ambas falsas.

Sol. Opção (A)

28. Considere o polinómio $P(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 2$.

Determine m e n sabendo que $P(x)$ é divisível por $x^2 + x + 2$

Sol. $m = 2$ e $n = 5$

29. Considera o polinómio $P(x) = x^3 + x^2 + kx + 15$. Sabe-se que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é igual a -7. Qual é o valor de k?

(A) –17 (B) –2 (C) 2 (D) 9

Sol. Opção (A)

30. Considere o polinómio $P(x) = -3x^4 + 6x^3 + 21x^2 - 60x + 36$. Sabe-se que 2 é uma raiz dupla de $P(x)$.

a) Apresente, justificando, uma expressão simplificada para o valor de $P(\sqrt{2})$.

b) Escreva $P(x)$ como produto de polinómios de grau não superior a 1.

c) Determine os valores de x que satisfazem a condição

$$P(x) > -3x^4 - 15x + 36.$$

Sol. a) $66 - 48\sqrt{2}$ b) $P(x) = -3(x-2)(x-2)(x-1)(x+3)$ c) $x \in]-5, 0[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

31. Passadas h horas do início de uma experiência, a temperatura de uma substância é dada pelo seguinte modelo: $T(h) = -h^3 + 6h^2 - 8h + 4$ onde T está em graus e h em horas.

Sabe-se que a experiência decorreu durante 5 horas.

a) Determina as temperaturas da substância no início e no fim da experiência.

b) Determina durante quanto tempo a temperatura da substância foi superior ou igual a $4°C$.

Sol. a) $T(0) = 4$; $T(5) = -11$ b) $[2,4]$