Matemática 12º ano

Revisões Geometria 11º ano--------------------Prof.Mónica Pinto

Produto escalar

1. Calcula $(\vec{u} \cdot \vec{v})$, sendo:

   a) $\vec{u} = (1,2)$ e $\vec{v} = (-1,3)$;   b) $\vec{u} = (3,2)$ e $\vec{u} = (-2,3)$;

Sol. a. 5 b. 0

2. Determina o produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabendo que

$$\| \vec{u} \| = 3 \quad ; \quad \| \vec{v} \| = 6 \;\; e \;\; \measuredangle (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$$

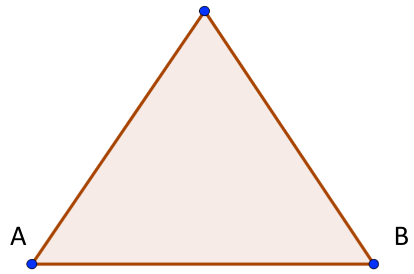
3. Sabendo que $\| \vec{a} \| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ e $\measuredangle \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$, determina $\| \vec{b} \|$.

4. Determina $\vec{a} \cdot \vec{b}$, sabendo que $\| \vec{a} \| = 2$ e $\vec{b} = -3\vec{a}$.

5. Determina k de modo a que os vetores $\vec{a} = (1, k)$ e $\vec{b} = (2, 1)$ sejam perpendiculares.

6. Na figura está um triângulo equilátero $[ABC]$ cujo perímetro é 30 cm.

   Determina $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Retas

1. Determina o ângulo formado pelas retas AB e r sendo

   A(2,0,-1) , B(-1,1,-1) e $r: (x, y, z) = (1, -1,0) + k\left(2,1, \sqrt{5}\right),\ k \in \mathbb{R}$

Sol: 60°

2. Considera, num referencial o.n. xOy, as retas *r* e *s*, definidas respetivamente, por:

$$r:\ (x, y) = (1,3) + k(0,2),\ \ k \in \mathbb{R} \qquad s:\ y = \frac{3}{4}x + 1$$

Sol 37°

3. Determina, em grau, o valor arredondado às décimas da inclinação da reta definida pela equação:

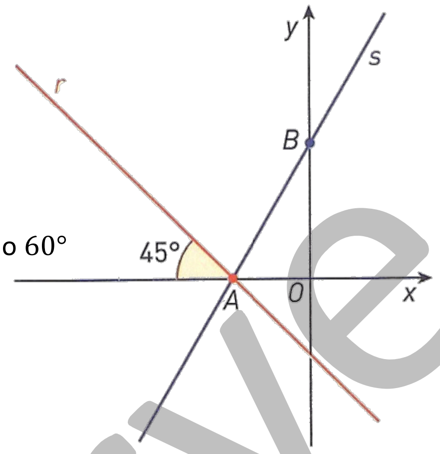
a) $(x, y) = (1,2) + k(2,3),\quad k \in \mathbb{R}$ b) $y = -3x + 2$ c) $x - 2y = 5$

Sol: a. 56,3° b. 108,4° c. 26,6°

4. No referencial da figura estão representadas duas retas *r* e *s*.

Sabe-se que:

- O ponto A é o ponto de interseção das retas r e s e tem de coordenadas (-1,0)
- A reta r forma um ângulo de $45°$ com a reta $y = 0$
- A reta *s* interseta o eixo das ordenadas no ponto B e tem inclinação $60°$



Determina:

a) A inclinação da reta r;

b) O declive da reta s;

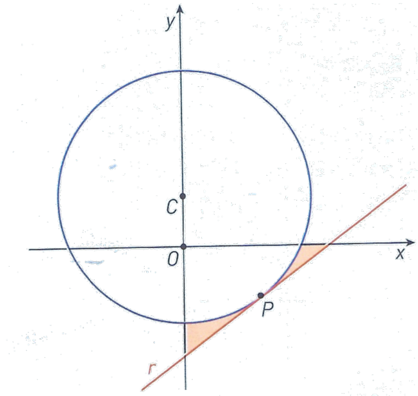
c) A equação reduzida da reta r

d) A equação reduzida da reta s

e) As coordenadas do ponto B

Sol: a. $135°$, $b. \sqrt{3}$ $\;c. y = -x - 1$ $\;d. y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$ $\;e. (0, \sqrt{3})$

5. No referencial o.n. da figura está representada uma circunferência de equação $x^2 + (y-2)^2 = 25$ e uma reta r tangente à circunferência no ponto P(3,-2)



a) Determina o valor, arredondado às unidades, da inclinação da reta r.

b) Define por uma condição a parte colorida da figura, incluindo a fronteira.

Sol. a.$37°$, b. $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \geq \frac{3}{4}x - \frac{17}{4} \wedge x^2 + (y-2)^2 \geq 25$

6. Escreve as equações vetorial e cartesiana da reta que contém A e é paralela ao vetor $\vec{u}$.

a) $A\,(0, 0, 2)$; $\vec{u} = (1, -1, 2)$

b) $A\,(1, 2, 3)$; $\vec{u} = (0, 2, 1)$

7. Para cada uma das seguintes retas indica um ponto que lhe pertença e um vetor diretor:

a) $r\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = z - 2$

b) $s\colon \frac{x-5}{4} = \frac{-y-2}{3} = z$

c) $t\colon \; 3 - x = 2y = \frac{z-1}{4}$

d) $u\colon \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{z-2}{5} \end{cases}$

e) $v\colon\; y = -1 \wedge z = 7$

f) $w\colon\; \frac{2x-1}{4} = -z + 2 \wedge y = 1$

Sol. A) $P(-1,0,2)$ $\vec{u}=(3,2,1)$ b. $P(5,-2,0)$ $\vec{u}=(4,3,1)$ c. $P(3,0,1)$ $\vec{u}=(-1,\frac{1}{2},4)$ d. $P(3,0,2)$ $\vec{u}=(0,1,5)$ e. *por exemplo* $P(1,-1,7)$ $\vec{u}=(3,0,0)$ f. $P\left(\frac{1}{2},1,2\right)$ $\vec{u}=(2,0,-1)$

Aplicações do produto escalar

1. Considera, num referencial o.n. Oxy , os pontos $A\,(1,2)$ e $B(-1,0)$. Determina a equação reduzida da mediatriz de[AB]

Sol: $y=-x+1$

2. Através do produto escalar determina uma equação da circunferência de diâmetro [AB], sendo A(0,2) e B(4,2). Identifica o raio e centro da circunferência.

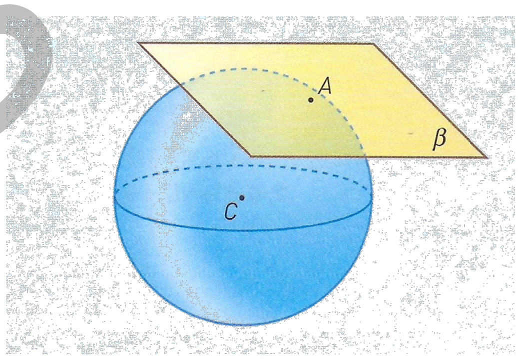
Sol: $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

3. Determina, num referencial o.n. Oxy , uma equação do plano tangente à superfície esférica de centro $C(0,0,\frac{1}{2})$, no ponto A(1,1,1).

Sol: $2x+2y+z-5=0$

4. Na figura está representada uma esfera de centro C e um plano β tangente à mesma no ponto A.

Num referencial o.n. a esfera é definida pela condição $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2\leq 14$.



O ponto A tem de coordenadas (3 ,-1, 2).

a) Escreve as equações cartesianas da reta t que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}=(2,0,1)$.

b) Mostra que o plano β pode ser definido pela equação $2x-y+3z=13$.

Sol a. $\mathbf{\frac{x-3}{2}=z-2\wedge y=-1}$

Planos

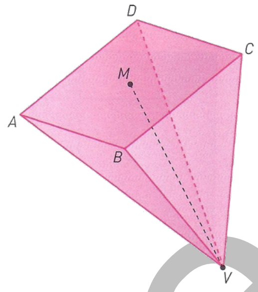
1. Relativamente a cada um dos seguintes planos, indica um vetor normal e um ponto que lhe pertença:

a. $(x-1)-(y+3)+2(z-5)=0$
b. $3x-y+2z=3;$
c. $2x+3y-\frac{z}{2}+1=0$

Sol. a. $\boldsymbol{P(1,-3,5),\vec{n}=(1,-1,2)}$ **b.** $\boldsymbol{P\left(0,0,\frac{3}{2}\right),\vec{n}=(3,-1,2)}$ **c.** $\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{2},0,0\right),\vec{n}=\left(2,3,-\frac{1}{2}\right)}$

\

2. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular. O ponto M é o centro da base.
Em relação a um referencial o.n. sabe-se que
   - M(0, 1, -3)
   - V(2,0,-1)



a) Mostra que $2x - y + 2z + 7 = 0$ é uma equação do plano que contém a base da pirâmide.
b) Determina o valor de k para qual o ponto $P(k, -2, k+1)$ pertence ao plano que contém a base da pirâmide.

Sol. b. $k = -\frac{11}{4}$

3. Escreve uma equação cartesiana do plano definida pelo ponto $A(0,1,2)$ e pelos vetores $\vec{m} = (1,0,1)$ e $\vec{n} = (1,-1,0)$

$\boldsymbol{Sol.\ x + y - z = -1}$

4. Determina uma equação geral do plano definido pelo $A(0,01)$ e pelo vetores $\vec{m} = (2,0,-1)$ e $\vec{n} = (-2,3,0)$.

$\boldsymbol{Sol.\ 3x + 2y + 6z - 6 = 0}$

5. Determine uma equação cartesiana do plano α definido pelos pontos $A(-2,0,1), B(0,-3,1)$ e $C(1,-4,2)$

$\boldsymbol{Sol.\ 3x + 2y - z = -7}$

Posições relativas Planos e Retas

1. Estuda a posição relativa entre a reta e plano apresentados:

   a. r: $(x,y,z) = (1,2,3) + k \cdot (3,2,1),\ k \in \mathbb{R}$ e α: $6x + 4y + 2z - 5 = 0$

   b. s: $\frac{-x}{2} = y + 1 = \frac{z}{4}$ e α: $3x + 2y + z = 1$

Sol. a. Perpendicular b. Paralelo

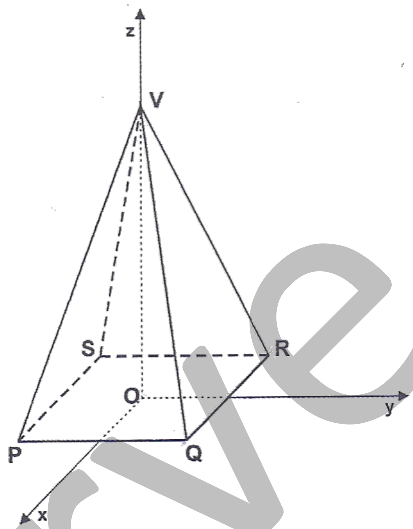
2. Estuda a posição relativa entre os planos:

   a. $\alpha:\ 3x + 2y - z + 5 = 0$ e $\beta : x - 3y - 3z = 1$

   b. $\alpha:\ 3x + 2y - z + 5 = 0$ e $\beta : 6x + 4y - 2z - 1 = 0$

Sol. a. Perpendiculares b. Paralelos

3. Considera , num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular de base quadrada.



- O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz
- A base da pirâmide está contida no plano xOy
- A aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oy
- O ponto Q tem de coordenadas $(2,2,0)$

a) Sabendo que, na unidade considerada, o volume da pirâmide é igual a 32, mostre que a cota do vértice V é igual a 6.

b) Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$

c) Determina uma condição que defina a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano QRV.

d) Justifica que a interseção da aresta $[QV]$ com o plano $z = 3$ é o ponto $M(1,1,3)$

Sol. c . $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + \mathbf{k}(\mathbf{0}, \mathbf{3}, \mathbf{1}), \mathbf{k} \in \mathbb{R}$