MATEMÁTICA 11º ANO

RESUMO Limites de funções ----------------------------------PROF. MÓNICA PINTO

Ponto aderente a um conjunto:
Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um ponto aderente ao conjunto A quando existe uma sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim u_n = a$
Ao conjunto dos pontos aderentes a A chama-se **aderência de $\boldsymbol{A}$** e representa-se por $\overline{\boldsymbol{A}}$**.**

- A aderência de um intervalo é sempre esse intervalo fechado, isto é, $A =]a, b[$, $\bar{A} = [a, b]$
- Todos os pontos isolados de um conjunto pertencem à aderência desse conjunto. $A = \{a, b\}$, $\bar{A} = \{a, b\}$
- A aderência de um conjunto formado por termos de uma sucessão : são todos os termos da sucessão e a sucessão for convergente também o limite da sucessão pertence à aderência.

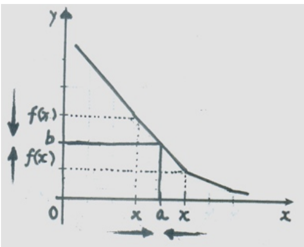
Limite de uma função segundo Heine:

Seja a um ponto aderente ao domínio de uma função f. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se e somente se para qualquer sucessão (x_n), em que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \in D_f$ e $\lim \quad x_n = a$ se tem $\lim \quad f(x_n) = L$.

Exemplo: Provar, usando a definição de limite de uma função que $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ sendo f uma a função real de variável real definida por $f(x) = 3x + 1$.

<u>Resolução:</u> Como $D_f = \mathbb{R}$, $2 \in \overline{D_f}$. Seja (x_n) uma qualquer sucessão em que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \in D_f$ e $lim \quad x_n = 2$. Então $lim\, f(x_n) = lim(3x_n + 1) = 3 \times 2 + 1 = 7$, logo $lim_{x \to 2} f(x) = 7$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$



O limite se existir <u>tem de ser único</u>, isto é , os <u>limites laterais têm de existir e serem iguais</u>:

- **Se $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{D_f}$,** $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = b$, então $\lim_{x \to a} f(x) = b$
- **Se $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{D_f}$,** $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b$, então $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Propriedades dos limites:

1. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$ **2.** $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ **3.** $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

4. $\dfrac{k}{\pm\infty} \longrightarrow 0$ **5.** $\dfrac{k}{0^{\pm}} \longrightarrow \pm\infty$

Indeterminações :

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ <u>**Quociente de polinómios**</u> : $\lim_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^m + \ldots + a_n}{b_0 x^n + \ldots + b_n} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{a_0 x^m}{b_0 x^n}$ (isto é : selecionar termos de maior grau no numerador e no denominador ou colocar em evidência o termo de maior grau no numerador e no denominador)

<u>**Quocientes com radicais (** $\sqrt{}$ **)**</u> : : Ou multiplicar e dividir pelo conjugado ou passar tudo para dentro da $\sqrt{}$, ou ainda, colocar os termos de maior grau em evidência que estão dentro da $\sqrt{}$, ou ainda dividir todos termos por x.

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$ Obs: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$

Exponenciais: Dividir todos os termos pela potência de maior base,
Se $\mathbf{0 < a < 1}$, $a^{+\infty} \to 0$, $a^{-\infty} \to +\infty$, $\mathbf{a > 1}$, $a^{+\infty} \to +\infty, a^{-\infty} \to 0$

$\boxed{0 \cdot \infty}$ Transformar $0 \cdot \infty \to \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\infty - \infty}$ **Polinómios :** Colocar em evidência o termo de maior grau ou escolher o termo de maior grau
Fracções : efetuar operações
Radicais ($\sqrt{\ }$) : Regra geral, multiplicar e dividir pelo conjugado.

$\boxed{\frac{0}{0}}$ **Polinómios** : **Decompor em fatores:** Se todos os termos tiverem x, colocar o x de menor grau em evidência; caso contrário, recorrer à **regra do Ruffini.** Ou ainda se conhecermos os zeros do polinómio fatorizar diretamente.(Ex: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - "zero_1") \cdot (x - "zero_2")$)

Radicais ($\sqrt{\ }$) : Regra geral, multiplicar e dividir pelo conjugado.

$\boxed{0 \cdot \infty}$ Transformar $0 \cdot \infty \to \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\infty - \infty}$ **Polinómios :** Colocar em evidencia o termo de maior grau ou escolher o termo de maior grau .
Frações : efectuar operações
Radicais ($\sqrt{\ }$) :Regra geral, multiplicar e dividir pelo conjugado.
Exponenciais: Colocar em evidência a potência de maior base.

Limites com módulos: É necessário desenvolver o módulo em função por ramos, para saber que ramo usar.
Nota: Escrever um módulo numa função por ramos: $\mathbf{a}|\mathbf{f(x)}| + \mathbf{k} = \begin{cases} af(x) + k & se\ \ f(x) \geq 0 \\ -af(x) + k & se\ \ f(x) < 0 \end{cases}$

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO $x = a$

Uma função $f(x)$ é contínua num ponto a ($a \in D_f$) se e só se $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Ou seja, uma função é contínua num ponto do seu domínio se existir limite da função nesse ponto.

Continuidade Lateral : f é continua à direita de a se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

f é continua em a se for contínua à direita e à esquerda de a.

Pontos de descontinuidade : são pontos do domínio onde a função não é continua.
A soma, produto, quociente,composta….. de funções contínuas é função contínua.