MATEMÁTICA 12º ANO

Tema: Probabilidades --PROF. JORGE PINTO

1. Quatro rapazes e três raparigas vão ao cinema e ocupam lugares seguidos numa fila.
   De quantas maneiras podem ocupar os sete lugares de forma que não fiquem raparigas em lugares seguidos?

   (A) 144 (B) 240 (C) 432 (D) 1440

   Resposta: (D)

2. No decurso de uma epidemia provocada por um vírus, sabe-se que, num determinado dia, a quarta parte dos membros de uma comunidade encontrava-se infetada. No mesmo dia, foi formada uma comissão de quatro elementos escolhidos ao acaso entre os membros dessa comunidade que se sabe ser formada por 28 indivíduos.
   Determine a probabilidade de a comissão assim formada ter pelo menos um indivíduo infetado.
   Apresente o resultado na forma dízima, arredondado às milésimas.

   Sol. $P=\frac{14\,490}{20\,475}=\frac{46}{65}\approx 0,708$

3. Seis alunos, entre os quais estão a Ana e o Bruno, colocam-se em fila para serem atendidos na cantina, um de cada vez.

   De quantas maneiras se podem colocar em fila de modo que a Ana seja atendida antes do Bruno?

   (A) 120 **(B)** 240 **(C)** 360 **(D)** 480

   Resposta: (C)

4. Considere todas as palavras de seis letras, com ou sem significado, que se podem formar trocando a ordem a letras da palavra ***RESOLVER***.

   Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, determine, na forma de fração irredutível, a probabilidade de a primeira e a última letra dessa palavra:

   a. serem a letra ***R***;
   b. serem letras diferentes.

   Sol. a. $P=\frac{360}{10\,080}=\frac{1}{28}$ b. $P=1-\frac{720}{10\,080}=\frac{13}{14}$

Prof. Jorge Pinto

5. A Ana, o Bruno e o Carlos requisitaram sete livros diferentes na biblioteca da escola para consultarem no próximo fim de semana, tendo em vista um trabalho de grupo em que estão a trabalhar.
De quantas maneiras poderão distribuir entre si os livros requisitados, sabendo que cada um levará para o fim de semana pelo menos dois desses livros?

(A) 630 **(B)** 210

(C) 105 **(D)** 35

Resposta: (A)

6. Considere um dado cúbico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.
   a. Lança-se o dado quatro vezes seguidas e em cada lançamento regista-se o algarismo da face que fica voltada para cima formando assim um número de quatro algarismos.
   Qual é a probabilidade de o número assim formado ser par e maior do que 5000?

   (A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

   b. O João vai pintar as faces do dado da seguinte forma:
   - quatro ou cinco faces são pintadas de azul;
   - as restantes faces são pintadas de vermelho;
   - os números inscritos nas faces ficam pintados de branco.

   De quantas maneiras pode ser pintado o dado?

   (A) 1080 **(B)** 144 **(C)** 90 **(D)** 21

Sol. a. Resposta: (A) b. Resposta: (D)

7. Sabe-se que, num grupo de 18 professores de uma Escola Secundária, 12 lecionam Física e 10 lecionam Química.
   a. Nesse grupo são escolhidos, ao acaso, dois professores.
   Em qual das seguintes opções se apresenta, na forma de percentagem com arredondamento às unidades, a probabilidade de os professores escolhidos lecionarem a mesma disciplina?

   (A) 4% **(B)** 59%

   (C) 69% **(D)** 73%

   b. Pretende-se formar uma comissão de cinco professores escolhidos entre os 18 elementos desse grupo para analisarem os novos programas das disciplinas que lecionam.

Prof. Jorge Pinto

De quantas maneiras pode ser formada a comissão de forma que dela faça parte pelo menos um professor que lecione as duas disciplinas?

Sol. a. Resposta: **(C)** b. 6566

8. Num cesto estão 15 peças de fruta, sendo 5 maçãs, 4 laranjas, 3 bananas, 2 pêssegos e uma meloa.

De quantas maneiras estas peças de fruta podem ser divididas por duas pessoas de tal modo que cada pessoa fique com uma peça de fruta, pelo menos?
Considere que as peças de fruta da mesma espécie não se distinguem.

(A) 120 **(B)** 118 **(C)** 720 **(D)** 718

Resposta: (D)

9. O Constantino criou uma palavra-passe de acesso ao seu computador, trocando a ordem a letras do seu nome.

Quando mais tarde precisou de a usar apenas se lembrava que as duas primeiras letras eram CO, por esta ordem.
Qual das seguintes expressões dá o número de palavras-passe que existem nestas condições?

(A) ${}^{9}A_4 \times {}^{5}C_2$ **(B)** ${}^{11}A_4 \times {}^{7}C_3 \times {}^{4}C_2$

(C) $\frac{9!}{3!}$ **(D)** $\frac{11!}{3! \times 2!}$

Resposta: (A)

10. De quantas maneiras se podem colocar dois peões brancos e dois peões pretos nas 32 casas pretas de um tabuleiro de xadrez?
Considere que os peões só se distinguem pela cor e não são colocados mais do que um peão em cada casa.

(A) 71 920 **(B)** 215 760

(C) 863 040 **(D)** 984 064

Resposta: (B)

Prof. Jorge Pinto

11. Num debate participam representantes de sete partidos políticos, quatro dos quais apoiaram o último governo e os restantes três estiveram na oposição.
A ordem pela qual é efetuada a primeira intervenção no debate é sorteada.
Qual é a probabilidade de, nessa primeira participação no debate, pelo menos dois dos partidos da oposição intervirem um a seguir ao outro?

(A) $\frac{2}{7}$ **(B)** $\frac{3}{7}$ **(C)** $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{5}{7}$

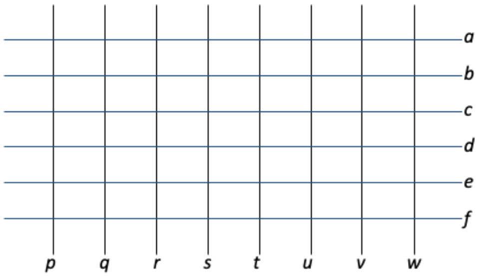
Resposta: (D)

12. Quantos são os números naturais pares com cinco algarismos diferentes?

(A) 13 776 **(B)** 13 440 **(C)** 15 120 **(D)** 12 096

Resposta: (A)

13. Na figura estão representados dois conjuntos de retas paralelas.



Sabe-se que:

- as seis retas a, b, c, d, e e f são paralelas entre si;
- as oito retas p, q, r, s, t, u, v e w são paralelas entre si e perpendiculares às primeiras.

Quantos retângulos são definidos por estas 14 retas?

(A) 48 **(B)** 420 **(C)** 168 **(D)** 448

Resposta: (B)

14. Oito pessoas vão sentar-se escolhendo o lugar ao acaso numa fila de 10 cadeiras.

Qual é a probabilidade de que as duas cadeiras que ficam livres sejam seguidas?

(A) $\frac{4}{5}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{8}{45}$ **(D)** $\frac{37}{45}$

Resposta: (B)

15. Dez amigos precisam de alugar dois ou mais automóveis para se deslocarem para o aeroporto.

Prof. Jorge Pinto

Estão apenas disponíveis três veículos: um de dois lugares, um de quatro lugares e um de cinco lugares.

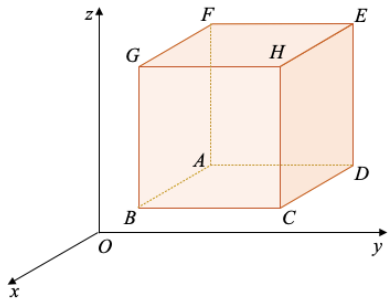
Admitindo que todos podem conduzir, de quantas maneiras se podem dividir em grupos para ocuparem os três veículos?

(A) 786 240 **(B)** 241 920 **(C)** 6930 **(D)** 5472

Resposta: (C)

16. No referencial $Oxyz$ da figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada uma das faces é paralela a um dos planos coordenados.

Escolhendo, ao acaso, dois vértices do cubo, qual é a probabilidade de esses dois pontos definirem uma reta paralela a pelo menos um dos planos coordenados?



(A) $\frac{6}{7}$ **(B)** $\frac{5}{7}$

(C) $\frac{4}{7}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

Resposta: (A)

17. Uma pequena Escola C+S tem apenas duas turmas do 12.º ano:

- a turma A, da área de Ciências e Tecnologias, com 24 alunos, sendo 8 raparigas e 16 rapazes;
- e a turma B, da área de Línguas e Humanidades, com 14 raparigas e 10 rapazes.

Pretende-se constituir uma comissão de quatro alunos do 12.º ano para organizar um passeio.

A comissão deve ter dois alunos de cada turma e ter tantos rapazes como raparigas.

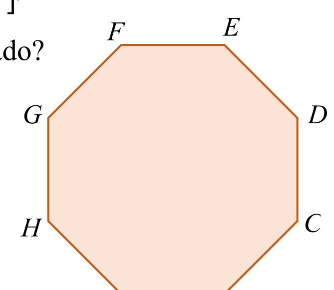
Quantas comissões diferentes se podem constituir?

(A) 17 920 **(B)** 25 868 **(C)** 30 100 **(D)** 12 180

Resposta: (C)

18. Escolhem-se, ao acaso, quatro vértices do octógono regular $[ABCDEFGH]$.

Qual é a probabilidade de esses quatro pontos serem vértices de um quadrado?



Prof. Jorge

(A) $\frac{1}{70}$ **(B)** $\frac{4}{35}$

(C) $\frac{2}{35}$ **(D)** $\frac{1}{35}$

Resposta: (D)

19. No sorteio de totoloto são extraídas 5 bolas de uma tômbola com 45 bolas numeradas de 1 a 49.
Em qual das opções seguintes se apresenta, na forma de percentagem com arredondamento às centésimas, a probabilidade de o menor número saído ser 1 e o maior ser 49?

(A) 0,97 % **(B)** 0,91 %

(C) 0,85 % **(D)** 0,80 %

Resposta: (C)

20. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(2x-\sqrt{x}\right)^{10}$ é um monómio da forma kx^7.

O valor de k é

(A) –8064 **(B)** –960 **(C)** 210 **(D)** 3360

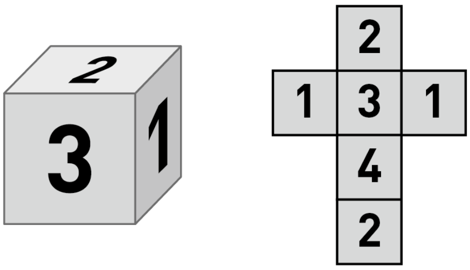
Resposta: (D)

21. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual a 300 e o terceiro elemento da linha seguinte é igual a 325.
Escolhe-se, ao acaso, um elemento da primeira dessas duas linhas. Qual é a probabilidade de esse elemento ser superior a 10 000?

(A) $\frac{9}{13}$ **(B)** $\frac{11}{13}$ **(C)** $\frac{17}{25}$ **(D)** $\frac{21}{25}$

Resposta: (A)

22. Na figura, está representado um dado **não equilibrado** e um esquema da sua planificação.



Lança-se este dado uma vez.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: "Sair número primo"
B: "Sair número par"

Prof. Jorge Pinto

Sabendo que $P\left(A\cup B\right)=\frac{3}{4}$, a probabilidade de sair a face com o número 1 é

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

Resposta: (A)

23. Considere todas as palavras, com ou sem significado, que se podem formar alterando a ordem das oito letras da palavra ***estender***.

    a. Quantas palavras é possível formar?

    b. Escolhendo, ao acaso, uma dessas palavras, qual é a probabilidade de que a mesma mantenha a ordem das consoantes (da palavra *estender*) e não tenha vogais seguidas?

    Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

Sol. a. 6720 b. $P = 0{,}3\%$

24. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9. Quantos desses números têm exatamente quatro algarismos 9?

Sol. 17920

25. Numa caixa há 10 bolas indistinguíveis ao tato. Sabe-se que algumas bolas são vermelhas e as restantes são amarelas.

    a. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.
    Sabe-se que a probabilidade de que as duas bolas extraídas sejam vermelhas é igual a $\frac{2}{9}$.

    Determine o número de bolas amarelas que estão na caixa?

    b. Admita agora que na caixa estão sete bolas vermelhas e três amarelas.
    As dez bolas da caixa são colocadas numa fila, ocupando as dez casas de um tabuleiro, numeradas de 1 a 10, como o que se representa na figura:
    De quantas maneiras se pode ordenar as bolas de modo que no início e o fim da fila fiquem bolas da mesma cor?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Sol. a. 5 bolas amarelas b. 64

26. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos sendo 15 raparigas e 10 rapazes.
Nessa turma vai ser constituída uma comissão de cinco membros aos quais serão atribuídos cinco cargos diferentes.

Prof. Jorge Pinto

De quantas maneiras se poderá formar a comissão se dela fizerem parte três raparigas e dois rapazes?

(A) ${}^{15}A_3 \times {}^{10}A_2$ **(B)** ${}^{15}C_3 \times {}^{10}C_2$

(C) ${}^{15}A_3 \times {}^{10}A_2 \times 5!$ **(D)** ${}^{15}C_3 \times {}^{10}C_2 \times 5!$

Resposta: (D)

27. Considere a linha do Triângulo de Pascal cuja soma dos quatro menores elementos é igual a 22.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser inferior a 100?

(A) $\dfrac{15}{{}^{11}C_2}$ **(B)** $\dfrac{6}{{}^{11}C_2}$ **(C)** $\dfrac{15}{{}^{10}C_2}$ **(D)** $\dfrac{6}{{}^{10}C_2}$

Resposta: (A)

28. Uma caixa contém seis bolas vermelhas, três bolas brancas e quatro bolas azuis.
Tanto as bolas vermelhas como as bolas brancas são iguais entre si, isto é, são indistinguíveis. As bolas azuis são numeradas de 1 a 4.
As 13 bolas vão ser retiradas da caixa e colocadas em fila, umas ao lado das outras.
    a. Quantas filas diferentes é possível formar de modo que as bolas azuis fiquem seguidas?

    (A) $\dfrac{9!\times 4!}{6!\times 3!}$ **(B)** $\dfrac{10!\times 4!}{6!\times 3!}$

    (B) $\dfrac{10!\times 4!}{9!}$ **(C)** ${}^{13}C_6 \times {}^{7}C_3 \times 4!$

    b. Quantas filas diferentes é possível formar de modo que nas extremidades fiquem duas bolas iguais?

Sol. a. Resposta: (B) b. 332640

29. Um código de abertura de uma mala é formado por quatro caracteres escolhidos entre 26 letras (A, B, C, …, Z) e 10 algarismos (0, 1, 2, …,9)
    a. Quantos códigos se podem formar com duas letras diferentes e dois algarismos diferentes?

    b. Quantos códigos é possível formar com quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número par?

Sol. a. 351000 b. 4920

30. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes (espadas, copas, ouros e paus). Em cada naipe há 13 cartas: três figuras (rei, dama e valete) e mais 10 cartas.
    a. Utilizando apenas as 12 figuras (quatro reis, quatro damas e quatro valetes), quantas sequências diferentes de 12 cartas se podem formar de modo que os reis fiquem seguidos e as damas também fiquem seguidas?

Prof. Jorge Pinto

b. Do baralho completo vai ser escolhido um conjunto de 13 cartas.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha de forma que no conjunto das 13 cartas escolhidas haja 10 e só 10 cartas do naipe de copas?

Sol. a. 414 720 b. 2 613 754

31. De quantas maneiras 13 livros diferentes podem ser divididos por cinco estudantes de forma que o André, a Beatriz e o Carlos recebam três livros cada um e o Diogo e a Ema recebam dois livros cada?

Sol. 7 207 200

32. Determine n tal que $30 \times {}^{n}C_2 = n \times {}^{n}A_3$.

Sol. $n = 5$

33. Considere o desenvolvimento de $A(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^{10}$.

Determine o coeficiente do termo de grau 2.

Sol. 405

34. Uma equipa participante num concurso de canções é formada por dez elementos sendo quatro rapazes e seis raparigas.

a. Vai ser escolhido um grupo de quatro elementos da equipa para participarem na próxima eliminatória. De quantas maneiras pode ser feita a escolha de forma que do grupo de quatro faça parte pelo menos um rapaz e pelo menos uma rapariga?

b. Os dez elementos da equipa vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros. De quantas maneiras o podem fazer de forma que as extremidades da fila sejam ocupadas por rapazes e que não fiquem dois rapazes em lugares consecutivos?

Sol. a. 194 b. 172800

35. ${}^{n}C_{100} + {}^{n}C_{101} + {}^{n+1}C_{102}$ é igual a:

(A) ${}^{n+1}C_{103}$ **(B)** ${}^{n+2}C_{102}$ **(C)** ${}^{n+2}C_{103}$ **(D)** ${}^{n+3}C_{102}$

Sol. Resposta: (B)

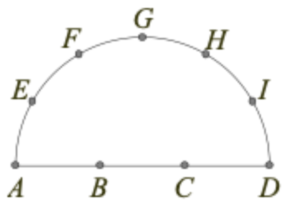
36. O sétimo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual ao vigésimo.
Qual é o segundo elemento da linha seguinte?

Sol. **26**

Prof. Jorge Pinto

37. Na figura estão representados nove pontos: A, B, C, D, E, F, G, H e I.
Sabe-se que:

- os pontos A, E, F, G, H, I e D pertencem à semicircunferência de diâmetro $[AD]$;
- os pontos B e C pertencem ao diâmetro $[AD]$.



a. Quantos triângulos são definidos por estes nove pontos?

b. Escolhem-se ao acaso dois desses nove pontos. Qual é a probabilidade de estes definirem uma reta que interseta a semicircunferência num único ponto.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Sol. a. 80 b. $\frac{5}{18}$

38. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(2+\frac{x^2}{2}\right)^{12}$ é um monómio da forma $k\,x^{10}$.

Determine o valor de k.

Sol. $k = 3168$

39. Relativamente a uma linha do Triângulo de Pascal sabe-se que o 6.º elemento é igual ao 15.º.
Qual é o maior valor dessa linha?

(A) 48 620 **(B)** 184 756

(C) 352 716 **(D)** 92 378

Sol. Resposta: (D)

40. Determina , na forma mais simplificada possível, o termo de ordem 8, no desenvolvimento de $\left(x\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{12}, x > 0$.

Sol. $\frac{101376}{x^6\sqrt{x}}$

41. Um dos temos do desenvolvimento de $(x+1)^n$ é $45x^2$. Qual é o valor de n?

Sol. 10

42. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação seguinte.

$$\cos^4 x - 4\cos^3 x + 6\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$$

Sol. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

43. Considere a seguinte expressão $A(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^n$, $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Jorge Pinto

Determine o menor valor de n de tal forma que no desenvolvimento de $A(x)$ há um termo independente de x.

Sol. $n = 5$

44. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Prove que :

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A) + P(A \cap \bar{B}) = 1 - 2P(A \cap B)$$

45. Dado um conjunto finito E, uma probabilidade P em $\mathcal{P}(E)$ e dois acontecimentos $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tais que:

$P(A) = 0{,}3$

$P(A \cap B) = 0{,}2$

$P(\bar{B}) = 0{,}3$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,8 (D) 0,9

Resposta: (B)

46. Na extração, ao acaso, de uma carta de um baralho de cartas incompleto sabe-se que a probabilidade de essa carta ser:

- De espadas é $\frac{1}{4}$;
- Um rei é $\frac{1}{8}$;
- De espadas ou ser rei é $\frac{1}{3}$.

Prove que o rei de espadas está no baralho.

Prof. Jorge Pinto