Matemática 12º ano - Trigonometria

Limites notáveis; Derivadas --------------------------------------Prof. Mónica Pinto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

1. Calcula os seguintes limites:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin(3x)}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

f. $\lim\limits_{x\to\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$

g. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\pi-x}{\sin x}$

h. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\pi}$

i. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x+\pi)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}$

j. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$

k. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

l. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x-\sin(3x)}$

m. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x+\frac{3\pi}{2})}{\cos(3x)}$

n. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin(x)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

o. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Observação : na alínea n, usar formula trigonométrica sin(a+b)

Sol. a.2 b. 6 c .+∞ d. 2 e. $\frac{1}{2}$ f. 1 g. 1 h. -1 i. -1 j. $\frac{1}{3}$ k. $\frac{1}{2}$ l. $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{3}$ n. $-\sqrt{3}$ o. $\frac{2}{\pi}$

2. A função f , de domínio $\mathbb{R}$, fica definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-k}{x-\sqrt{k}} & se\ x\leq 0\\[2mm] \dfrac{\sin(3x)}{x} & se\ x>0\end{cases}$$

Para um certo número real positivo k, a função f é contínua.
Qual é o valor de k?

A. 3 B. 6 C. 9 D. 27

Sol C.

3. Considera a função g definida por $g(x)=\begin{cases}\frac{4\cos x}{\pi-2x} & se\ x\neq\frac{\pi}{2}\\ k & se\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$, sendo k um número real. Determina o valor de k de modo que g seja uma função contínua em $x=\frac{\pi}{2}$.

Sol. 2

4. Considera a função h definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{\sin(3-x)} & se \;\; 3-\pi < x < 3 \\ 7\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) & se \;\; 3 \leq x < 3+\pi \end{cases}$.

Averigua se h é contínua em $x = 3$.

Sol . Sim

5. Para que valor de k a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{cos x}{\cos(3x)} & se \;\; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -9k^2 - 2k & se \;\; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ é contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sol. $\frac{1}{9}$

Derivadas

$$(\boldsymbol{sin(\,u)})' = \boldsymbol{u'cos(u)} \qquad \left(\boldsymbol{cos(u)}\right)' = -\boldsymbol{u'sin\,(u)} \qquad \left(\boldsymbol{tan\,(u)}\right)' = -\frac{\boldsymbol{u'}}{\boldsymbol{cos^2 u}}$$

6. Determina uma expressão analítica das derivadas das funções definidas a seguir, nos seus domínios de existência:

a) $f(x) = \sin(3x)$

b) $g(x) = \sin(x^2) + 3$

c) $h(x) = \frac{\sin\,(x^4)}{5}$

d) $i(x) = sin^2(x^3)$

e) $j(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $k(x) = \cos\,(5x)$

g) $l(x) = \cos\,(7x-3)$

h) $m(x) = x\cos(2x)$

i) $n(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

j) $o(x) = x^2\cos(2x)$

k) $p(x) = \cos x \sin x$

l) $q(x) = \tan(4x)$

m) $r(x) = \tan(2x - \frac{\pi}{4})$

n) $s(x) = \frac{1}{\tan x}$

o) $t(x) = \tan(2x^2)$

p) $u(x) = \frac{\sin x}{x}$

q) $v(x) = \frac{\cos(x)}{x \sin x}$

r) $z(x) = \cos(x^2) - 3sin^2 x$

Sol. a. $3\cos\,(3x)$ b. $2xcos(x^2)$ c. $\frac{4x^3\cos(x^4)}{5}$ d. $6x^2\sin(x^3)\cos(x^3)$ e. $-\frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}$ f. $-5\sin(5x)$ g. $-7\sin\,(7x-3)$ h. $\cos(2x) - 2xsin(2x)$ i. $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} + \cos(\frac{1}{x})$ j. $2x(\cos(2x) - x\sin(2x))$ k. $\cos(2x)$ l. $\frac{4}{cos^2(x)}$ m. $\frac{2}{cos^2(2x-\frac{\pi}{4})}$ n. $-\frac{1}{sin^2(x)}$ o. $\frac{4x}{cos^2(2x^2)}$ p. $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ q. $\frac{-x-\sin x\cos x}{x^2 sin^2 x}$ r. $-2x\sin x^2 - 6\sin x\cos x$