

MATEMÁTICA 11º ANO

Domínios, Assíntotas e Derivadas -----prof. Mónica Pinto

Tipo de Função	Domínio
Considerando $D_f = D_g = \mathbb{R}$	
Polinomial $a_0x^m + \dots + a_m$	\mathbb{R}
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$
$\sqrt[n]{f(x)}$	se n ímpar : \mathbb{R} Se n par: $D = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0\}$
$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$	$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$

Assíntotas Verticais ($x = a$) ao gráfico de f

1º Estudar o domínio da função.

2º Para os pontos a que não pertencem ao domínio, mas que são aderentes calcular $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x)$.

Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ então $x = a$ é A.V.

Nota:

Nas **funções por ramos** é necessário estudar os limites laterais no ponto que separa os ramos da função. Se algum deles der ∞ , então nesse ponto existe uma A.V.

Assíntotas não verticais (oblíquas ou horizontais) ($y = mx + b$) ao gráfico de f

1º Determinar o declive da assíntota: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

- Se $m = \infty$ não existem assíntotas não verticais.
- Se $m \neq 0 \neq \infty$ então existe A.O desde que $b \neq \infty$.
- Se $m = 0$, só poderão existir assíntotas horizontais

2º Calcular o b : $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$.

- Para existir assíntota, $b \neq \infty$.

Observações Se $y = ax + b$ é assíntota para $\rightarrow \pm\infty$ ao gráfico de $f(x)$, então:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - ax] = b$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = a$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = \pm\infty$

Taxa de variação média: $T.M.V._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Derivada, Taxa de Variação Instantânea ou Velocidade (por definição) $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Para existir derivada num ponto a , as derivadas laterais têm de existir e serem iguais.

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = a$: $y = f'(a)x + b$

1º Achar a derivada da função: $f'(x)$

2º Calcular o declive da reta tangente: $m = f'(a)$ (isto é, ir à expressão da derivada e substituir o x pelo valor a .)

3º Determinar $f(a)$, (isto é, ir à expressão da função inicial e substituir o x pelo valor a .)

4º Substituir em $y = mx + b$, o $y \leftarrow f(a)$, $m \leftarrow f'(a)$, $x \leftarrow a$ para calcular o b

Exemplo:

Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto $x = 2$ sendo $f(x) = 2x^2 + 1$.

Resolução:

$$f'(x) = 4x, \text{ então } m = f'(2) = 4 \times 2 = 8; \quad f(2) = 2 \times 2^2 + 1 = 9; \quad y = mx + b, 9 = 8 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -7$$

$$\text{A equação da reta pedida é: } y = 8x - 7$$

Monotonia (crescente/decrescente) e Extremos da função (máximos e mínimos)

1º Achar a derivada da função.

2º Achar os zeros da derivada da função, isto é resolver $f'(x) = 0$.

3º Construir um quadro de sinais para a derivada. Onde a derivada é positiva a função é crescente e onde a derivada é negativa a função é decrescente, e vice-versa.

Graficamente: uma função não tem derivada nos pontos de descontinuidades e nos "bicos".

Resultados:

Derivabilidade \Rightarrow Continuidade Continuidade $\not\Rightarrow$ Derivabilidade Não Continuidade \Rightarrow Não Derivabilidade

Regras das Derivadas

K constante ; u e v funções de x:		Propriedades da derivada
$k' = 0$		$(k \cdot u)' = k \cdot u'$ $[u \pm v]' = u' \pm v'$
$x' = 1$	$(kx)' = k; \left(\frac{x}{k}\right)' = \frac{1}{k}$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$		Derivada do produto: $[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$		Derivada da divisão: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$		Derivada da função composta $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$		

Concavidades e pontos de inflexão

1º Achar a segunda derivada da função.

2º Achar os zeros da segunda derivada da função, isto é resolver $f''(x) = 0$.

3º Construir um quadro de sinais para a segunda derivada. Onde a segunda derivada é positiva o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e onde segunda derivada é negativa o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

Um ponto de inflexão é um ponto do domínio onde se dá a mudança da concavidade.