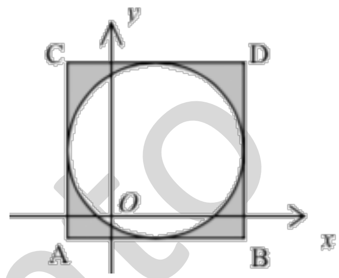
Ficha de Exercícios
Matemática A – 10º ano de escolaridade **Prof. Jorge Pinto**

Tema: Geometria Analítica **Subtema**: Geometria Analítica no plano

1. No referencial o.n. xOy da figura está representado um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e uma circunferência inscrita no quadrado.
   A circunferência é representada pela equação: $(x-2)^2+(y-3)^2=16$



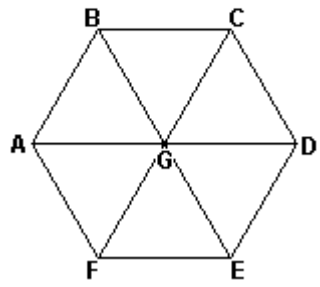
   a) Determine as coordenadas dos vértices do quadrado.
   b) Defina por uma condição a parte a sombreado na figura.
   c) Tomando para unidade do referencial o metro, calcule a área sombreada da figura, apresentando o resultado arredondado às centésimas.

Sol. a) $A(-2,-1)$ $B(6,-1)$ $C(-2,7)$ e $D(6,7)$ b) $(x-2)^2+(y-3)^2 \geq 16 \ \wedge -2 \leq x \leq 6 \ \wedge -1 \leq y \leq 7$ c) $13{,}73\ m^2$

2. No plano, em relação a um referencial o.n. Oxy , considera os pontos $A(1,-2)$ e $B(-2,0)$.
   Determina uma equação na forma reduzida da:
   a) mediatriz de [AB] ;
   b) circunferência de diâmetro [AB] ;
   c) Determina as coordenadas do ponto P , sabendo que $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

Sol. a) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}$ c) As coordenadas do ponto P são: $\left(\frac{3}{2},\ -1\right)$

3. O hexágono regular $[ABCDEF]$, representado na figura, está dividido em seis triângulos geometricamente iguais. Qual das afirmações seguintes é falsa?

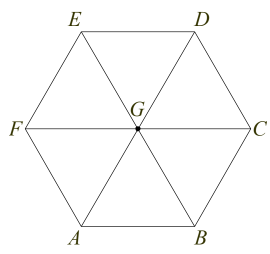


(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (B) $[A,B]=[E,D]$

(C) $2\,\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AC}$ (D) $\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \overrightarrow{AF}=k\,\overrightarrow{EB}$

Sol. (B)

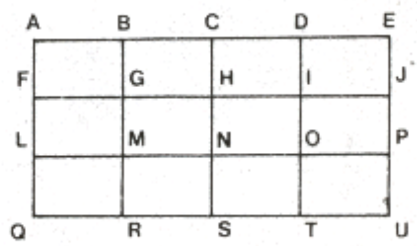
4. Considere o hexágono regular representado na figura. Escolha a opção correta.



(A) $C-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{CD}$ **(B)** $F+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=E$ **(C)** $\overrightarrow{FG}+2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EA}$ **(D)** $2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

Sol. C

5. A figura representa um retângulo $\left[AEUQ\right]$ dividido em doze retângulos geometricamente iguais entre si.



A igualdade $\overrightarrow{EN} - 3\overrightarrow{JP} = \left(2k\right)\overrightarrow{UF}$ é válida quando k for igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

Sol.(C)

6. Considera, num referencial o.n. Oxy, os vetores $\vec{u} = (2, 3-k)$ e $\vec{v} = (2k^2, 4)$.

Determina k de modo a que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam iguais.

Sol: $k = -1$

7. Considere num referencial o.n. Oxy os vetores $\vec{u} = \left(2, -\sqrt{3}\right)$ e $\vec{v} = \left(k^2, -\sqrt{12}\right)$.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, quando:

(A) $k = -1 \vee k = 1$ (B) $k = -\sqrt{3} \vee k = -2\sqrt{3}$

(C) $k = -2 \vee k = 2$ (D) $k = 0 \vee k = 2$

Sol. (C)

8. Considere um segmento $\left[AB\right]$ e M o seu ponto médio.

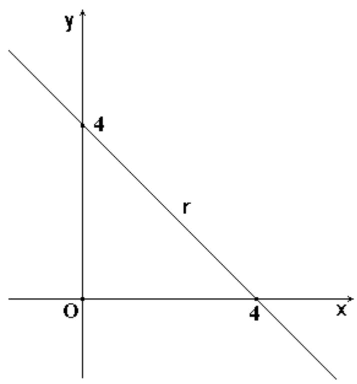
Seja r a reta mediatriz de $\left[AB\right]$ e P um ponto pertencente a r, mas distinto de M. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP}$ (B) $\overline{AP} = \overline{BM}$

(C) $\exists k \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{MA}$ (D) $\overline{AP} \neq \overline{BP}$

Sol. (C)

9. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. Oxy, uma reta r que interseta os eixos Ox e Oy nos pontos de coordenadas $\left(4,0\right)$ e $\left(0,4\right)$, respetivamente. Considere ainda a reta t definida por $y = 2x + b,\ b \in \mathbb{R}$. Sabendo que as retas r e t se intersetam num ponto de coordenadas positivas, podemos afirmar que:



(A) $b < 4$ (B) $0 < b < 8$

(C) $-8 < b < 4$ (D) $b > -8$

Sol. (C)

10. Num plano munido de um referencial cartesiano, considere os vetores, não nulos:

$$\vec{u}\left(k-5\,,k+2\right) \text{ e } \vec{v}\left(-k-\frac{5}{2}\,,k+4\right),\, k \in \mathbb{R}$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se:

(A) $k=2 \vee k=-\frac{15}{4}$ **(B)** $k=-2 \vee k=\frac{15}{8}$

(C) $k=2 \vee k=\frac{7}{4}$ **(D)** $k=-2 \vee k=\frac{7}{8}$

Sol. A

11.Considere, num referencial o.n. Oxy, os vetores $\vec{u}=\left(-\left(k-\sqrt{3}\right)^2,\sqrt{18}\right)$ e $\vec{v}=\left(-1,\sqrt{2}\right)$. Os vetores dados são colineares, quando:

(A) $k=\sqrt{3} \ \vee \ k=-\sqrt{3}$ (B) $k=2\sqrt{3} \ \vee \ k=0$

(C) $k=-1 \ \vee \ k=1$ (D) $k=2\sqrt{3} \ \vee \ k=\sqrt{3}$

Sol. (B)

12.Considere, num referencial ortonormado Oxy do plano, os pontos $A \rightarrow \left(-2\,,5\right)$ e $B \rightarrow \left(1\,,4\right)$ e o vetor $\vec{u}=(p,3)$, $p \in \mathbb{R}$.

O valor do parâmetro real p que faz com que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ sejam colineares é:

(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) -9

Sol. (D)

13.Considere, num referencial cartesiano, os pontos $M \rightarrow \left(-1\,,0\right)$ e $N \rightarrow \left(3\,,x\right)$.

Os valores reais de x que fazem com que o vetor $\overrightarrow{MN}$ tenha norma igual a 5 são:

(A) -8 e 2 (B) -3 e 3 (C) -4 e 4 (D) -9 e 1

Sol. (B)

14.Considere, num referencial o.n. $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ os vetores $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}$ e $\vec{b}=\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$ e os pontos $A\left(2,-4\right)$ e $B\left(-1,5\right)$.

a) Indique as coordenadas e as componentes do vetor $\vec{a}-2\overrightarrow{AB}$.
b) Calcule o valor de $\left\|\vec{a}+2\vec{b}\right\|$.
c) Determine as coordenadas de um vetor colinear com $\vec{a}$, que tenha **sentido contrário** ao de $\vec{a}$ e cuja norma seja igual a $2\sqrt{10}$.

Sol. a) $(5\,,-15)$; Componentes $5\vec{i}$ e $-15\vec{j}$ b) $1+2\sqrt{3}$ c) $\vec{u}=\left(2\,,-6\right)$

15.Considere, num referencial o.n. Oxy, os pontos $P\left(1,2\right)$; $Q\left(0,-1\right)$ e os vetores $\vec{u}=\left(1,4\right)$ e $\vec{v}=\left(-1,-2\right)$.

a) Determine as coordenadas de: $\overrightarrow{PQ}$, $P+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ e $-3\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}$.

b) Mostre que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

c) Calcule:

$c_1)$ $\left\|\vec{u}\right\|$ $c_2)$ $-\sqrt{3}\times\left\|\overrightarrow{PQ}-\vec{u}\right\|$

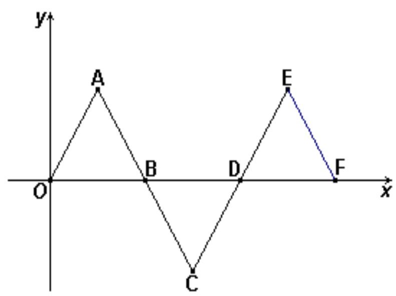
$c_3)$ as soluções, em $\mathbb{Z}$, da equação $-x^2.\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2-2x=0$

d) Determine as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{w}$, colinear com $\overrightarrow{PQ}$ e de norma $\sqrt{30}$.

Sol . a) $\overrightarrow{PQ}=\left(-1,-3\right)$; $P+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left(3,8\right)$ e $-3\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}=\left(-\frac{16}{5},-\frac{62}{5}\right)$ $c_1)$ $\sqrt{17}$ $c_2)$ $-\sqrt{159}$ $c_3)$ $-\frac{1}{5}$ e 0 d) $\left(-\sqrt{3},-3\sqrt{3}\right)$ e $\left(\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$

16. No referencial cartesiano da figura estão representados três triângulos equiláteros geometricamente iguais.

a) Recorrendo apenas às letras assinaladas na figura, complete os espaços em "branco", de modo a obter proposições verdadeiras:



$a_1)$ $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BA}=.......$ $a_2)$ $C-2\,\overrightarrow{EF}=.......$

$a_3)$ $C-A=.......$ $a_4)$ $\overrightarrow{DE}+.......=\overrightarrow{BD}$

b) Sabendo que $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{6},-3\sqrt{2}\right)$, determine:

$b_1)$ as coordenadas do vetor $\overrightarrow{FE}$; $b_2)$ $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$.

Sol. $a_1)$ $\overrightarrow{DE}$ $a_2)$ A $a_3)$ $\overrightarrow{AC}$ $a_4)$ $\overrightarrow{EF}$ $b_1)$ $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ $b_2)$ $2\sqrt{6}$

17. Considere, num referencial o.n. $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$ os vetores $\vec{a}=-\overrightarrow{e_1}+3\overrightarrow{e_2}$, $\vec{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ e $\vec{u}=\left(k-1,p+4\right)$.

a) Indique as coordenadas e as componentes do vetor $\vec{a}$.

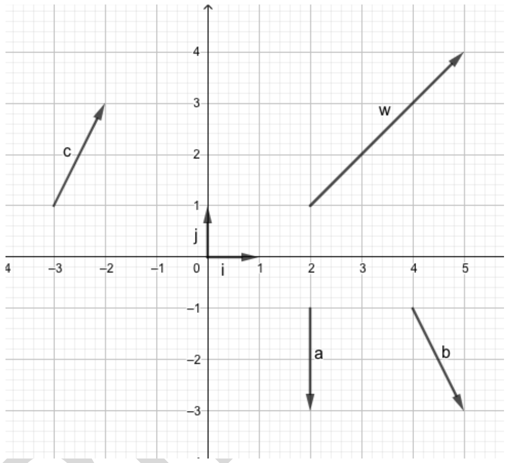
b) Calcule os valores dos números reais k e p, de modo que $\vec{u}+\vec{a}=\vec{b}$.

c) Calcule o valor de $\left\|\vec{a}-2\vec{b}\right\|$.

d) Determine as coordenadas de um **vetor colinear** com $\vec{a}$ de norma igual a $2\sqrt{10}$.

Sol. a) Coordenadas $(-1\,,3)$; Componentes $-\vec{e_1}$ e $3\vec{e_2}$ b) $k=\frac{5}{2}$ e $p=-\frac{17}{2}$ c) $2\sqrt{10}$ d) $(-2\,,6)$ ou $(2\,,-6)$

18. Na figura em referencial (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), estão representados os vetores $\vec{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\vec{c}$ e $\overrightarrow{w}$



a) Determina as coordenadas dos vetores $\vec{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\vec{c}$ e $\overrightarrow{w}$

b) determina as coordenadas do vetor $\vec{t}$, sendo

$$\vec{t} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3(\,\vec{c} - 2\vec{\imath}\,)$$

c) Determina os números reais x e y tais que $\vec{c} = x\vec{b} + y\vec{w}$

e) Exprime $\vec{w}$ em função de $\vec{c}$ e $\vec{b}$

sol. a) $\vec{a}(0,-2)$ $\vec{b}(1,-2)$ $\vec{c}(1,2)$ e $\vec{w}(3,3)$ b) $\vec{t} = (3,-7)$ c) $x = -\frac{1}{3}$ e $y = \frac{4}{9}$ e) $\vec{w} = \frac{9}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{b}$

19. Num plano munido de um referencial cartesiano, sabe-se que os pontos $A(-1,-2)$, $B(-4,2)$ e $C(8,10)$ são vértices de um paralelogramo.

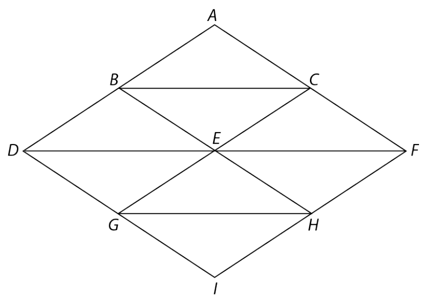
a) Determine as coordenadas de um ponto D , quarto vértice do paralelogramo.

b) Escreve uma equação reduzida do círculo cujo centro é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$ e o raio é igual a $d(A,B)$.

Sol. a) $D(11\,,6)$ ou $D(-13\,,-10)$ ou $D(5\,,14)$ b) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + (y-4)^2 \leq 25$

20. Na figura estão representados oito triângulos geometricamente iguais.

Os pontos B, C, E, G e H são os pontos médios dos segmentos de reta $[AD]$, $[AF]$, $[DF]$, $[DI]$ e $[FI]$, respetivamente. Qual das opções representa o ponto A?



(A) $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DA}$

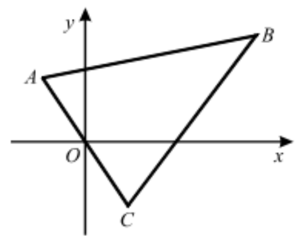
(B) $G - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HF}$

(C) $D + 2\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{ID}$

(D) $E + \overrightarrow{DE} - 2\overrightarrow{EC}$

Sol. (C)

21. Na figura está representado num referencial o.n. Oxy, o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que :

- O ponto O, origem do referencial, é o ponto médio do lado $[AC]$
- O vetor $\overrightarrow{AB}$ tem de coordenadas $(10\,,2)$
- O vetor $\overrightarrow{BC}$ tem de coordenadas $(-6,-8)$

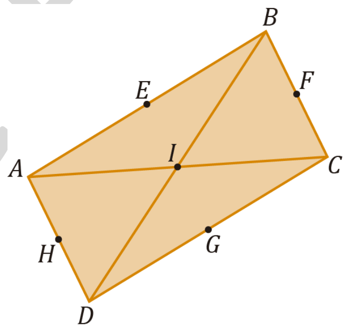
a) Determina as coordenadas do ponto A e do ponto C.

b) Mostra que o ponto B tem coordenadas $(8\,,5)$.

c) Averigua qual a posição da origem do referencial em relação à circunferência de diâmetro $[AB]$

Sol. a. A(-2,3) C(2,-3) c. pertence ao interior

22. Na figura está representado o paralelogramo [ABCD], tais que os pontos E, F, G e H são pontos médios dos lados [AB], [BC], [CD] e [DA], respetivamente, e o ponto I é a interseção das respetivas diagonais.



Sabe-se, fixado um dado referencial ortonormado, que:

■ o ponto A tem coordenadas $(1\,,2)$;

■ o ponto B tem coordenadas $(3\,,6)$;

■ o ponto I tem coordenadas $\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$.

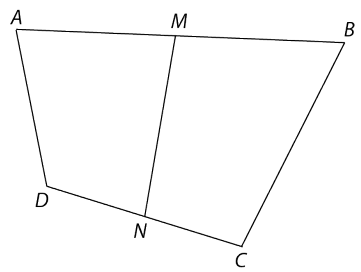
a) Determine as coordenadas dos vértices C e D do paralelogramo [ABCD].

b) Determine a inequação reduzida do círculo de centro G e raio $\left\|\overrightarrow{AH}\right\|$.

c) Determine as coordenadas do vetor colinear a $\overrightarrow{AB}$, de sentido contrário e de norma $\sqrt{5}$.

Sol. a) $C(8\,,5)$ e $D(6\,,1)$ b). $(x-7)^2+(y-3)^2\leq\frac{13}{2}$ c) $\vec{u}=-\frac{1}{2}(2\,,4)\Leftrightarrow\vec{u}=(-1\,,-2)$

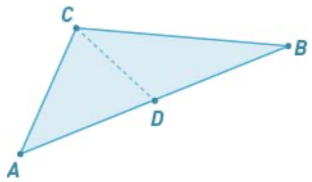
23. Na figura encontra-se representado o quadrilátero $[ABCD]$. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente.



Mostre que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{NM}$.

24. Na figura está representado um triângulo [ABC] , sendo [CD] uma mediana do triângulo.

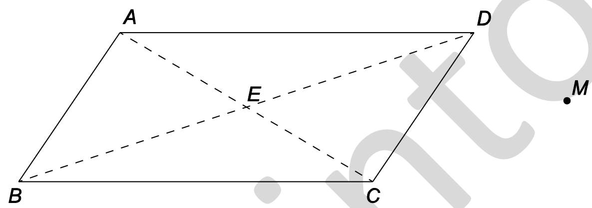
Mostra que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CD}$.



25. Na figura está representado um paralelogramo [ABCD]. O ponto E é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo. O ponto M é um ponto qualquer do plano.

Prova que:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{ME}$



26. Considere, num referencial o.n. Oxy, os pontos $A(-1,2)$ e $B(2,-3)$.

a) Escreva uma equação vetorial da reta paralela a AB e que contém o ponto $P(1,1)$.

b) Seja C um ponto do semieixo positivo Ox tal que $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BC}\|$

Determine as coordenadas do ponto D, pertencente ao 1.º quadrante, de forma a que $[ABCD]$ seja um quadrado.

Sol. a) $(x,y)=(1,1)+k(3,-5)$, $k\in\mathbb{R}$ b) D (4,5)

27. Dadas as retas $r\ :\ 2x+y=1$, $s\!:\ (x,y)=(1,-1)+\ k(1,2),\ k\,\epsilon\mathbb{R}$

Indica

a) dois pontos de cada reta;
b) o declive de cada reta;
c) um vetor diretor de cada reta;
d) o ponto de interseção com o eixo das abcissas;
e) se o ponto (2,5) pertence à reta r e à reta s.
f) Escreve a equação vetorial da reta r.
g) Escreve a equação reduzida da reta s.
h) As retas r e s são paralelas? Justifica.
i) Representa graficamente, no mesmo referencial as duas retas.
j) Determina, analiticamente, o ponto de interseção das retas r e s.
k) Escreve uma equação vetorial de uma reta paralela à reta r e que passe na origem.
l) Escreve uma equação reduzida de uma reta paralela à reta s e que passe no ponto (1,1).

Sol. A a) r: $(0,1);(1,-1)$, s: $(1,-1);(2,1)$ b) $m_r=-2$; $m_s=2$, c) $\vec{r}=(1,-2)$; $\vec{s}=(1,2)$ d) r: $P\left(\frac{1}{2},0\right)$ s: $P(\frac{3}{2},0)$

e. Não pertence a ambas as retas. B. $(x,y)=(0,1)+k(1,-2), k\in\mathbb{R}$ C. $y=2x-3$

D. Não. Declives diferentes. F. (1,-1) G. $(x,y)=(0,0)+k(1,-2), k\in\mathbb{R}$

H. $y=2x-1$

28. Das retas que a seguir se indicam, qual delas é paralela à reta de equação $y = 2x - 1$?

(A) $(x, y) = (-1, 2) + k(1, -2),\ k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y) = (-1, 2) + k(-2, 6),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (2, -1) + k(2, 1),\ k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y) = (2, -1) + k\left(\frac{1}{2}, 1\right),\ k \in \mathbb{R}$

Sol. (D)

29. Considere, num referencial ortonormado Oxy, os pontos $A \rightarrow (-3, 5)$ e $B \rightarrow (-4, 6)$

Uma condição que define a semirreta $\dot{B}A$ é:

(A) $y = -x + 2$ (B) $y = -x + 2 \wedge x \geq -4$

(C) $y = -x + 2 \wedge x \leq -4$ (D) $y = -x + 2 \wedge y \geq 5$

Sol.(B)

30. Num referencial o.n. Oxy, considera os pontos $A(3,1), B(2,-2)$ e $C(1,-3)$.

a) Escreve uma equação da circunferência de centro em A e que contém B

b) Escreve uma equação vetorial da reta BC.

c) Escreve uma equação reduzida da reta BC.

d) A reta BC interseta circunferência em 2 a), em dois pontos *B* e *D*. Determina as coordenadas do ponto *D*.

Sol. a. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ b. $(x, y) = (1, -3) + k(-1, -1), k \in \mathbb{R}$ c. $y = x - 4$ d. $D(6,2)$

31. Considera, num referencial cartesiano o.n. Oxy, os pontos $B(2,2)$ e $M(0,3)$ e a reta r, definida por $(x, y) = (-2,3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$.

a) Escreve a equação reduzida da reta BM

b) Determina analiticamente as coordenadas do ponto de interseção das retas r e BM.

Sol. a. $y = -\frac{1}{2}x + 3$ b. $(-4,5)$

32. Num referencial ortonormado Oxy, as condições $(x, y) = (2, -2) + k(1, -1),\ k \in \mathbb{R}$ e $-1 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 1$ definem, cada uma delas, um conjunto de pontos do plano.

A interseção destes dois conjuntos de pontos é:

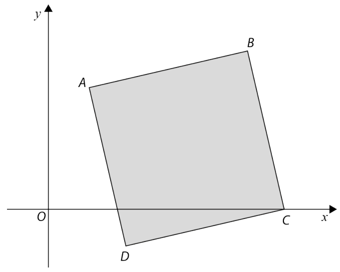
(A) o conjunto vazio. (B) um ponto.

(C) dois pontos. (D) um segmento de reta.

Sol.(D)

33. Na figura encontra-se representado, em referencial o.n. xOy, o quadrado $[ABCD]$, de área igual a 17.

Sabe-se que o ponto C pertence ao eixo Ox e que as retas AB e BC são definidas, respetivamente, por $(x,y) = (1,3) + k(4,1), k \in \mathbb{R}$ e $4x + y = 24$. Determine:



a) as coordenadas do ponto B;

b) As coordenadas dos pontos A , D e C

c) uma equação vetorial da reta CD.

Sol. a). $B(5,4)$ b) $D(2,-1)$, $A(1,3)$ e $C(6,0)$ c) $(x,y)=(6,0)+k(4,1), k\in\mathbb{R}$

34. Na figura estão representadas, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, duas circunferências.

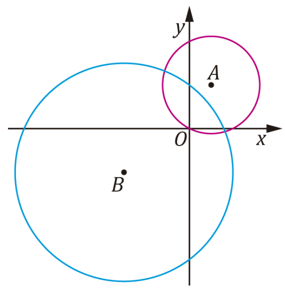
Sabe-se que:

■ a circunferência de centro A é definida pela equação:

$$x^2+y^2-2x-4y=0$$

■ a circunferência de centro B é definida pela equação:

$$x^2+y^2+6x+4y-12=0$$



a) Defina, por meio de uma condição, o segmento de reta [AB].

b) Determine uma equação vetorial da reta AB.

Sol. $y=x+1 \wedge -3\leq x\leq 1$ $AB:\ (x\ ,y)=(1\ ,\ 2)+k(-4\ ,\ -4),\ k\in$R