MATEMÁTICA 12º ANO

Probabilidades. Continuidade e assíntotas ------------------PROF. JORGE PINTO

1. Um saco contém nove cartões, numerados de 1 a 9 e indistinguíveis ao tato.

Retiraram-se todos os cartões do saco, um a um, e colocaram-se em fila numa mesa.

Qual é a probabilidade de os números inscritos nos três primeiros cartões serem primos?

(A) $\frac{5}{42}$ **(B)** $\frac{1}{21}$ **(C)** $\frac{1}{12}$ **(D)** $\frac{5}{21}$

Sol. Opção (B)

2. Considere o problema: "Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando um algarismo 0, um algarismo 1, dois algarismos 8 e três algarismos 9. Determine quantos destes números são pares.

Sol. 160

3. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E \text{ e } B \subset E)$.

Sabe-se que:

• $P(A) = 0{,}3$

• $P(B) = 0{,}5$

• $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(\bar{B}|(A \cup B)\right)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Sol. $\frac{1}{6}$

4. Um supermercado vende uma certa marca de biscoitos em pacotes. Um estudo feito a esta marca de biscoitos revelou que:

- 70 % das embalagens que não estão intactas têm pelo menos um biscoito partido.
- 90 % das embalagens intactas não contêm nenhum biscoito partido.

Sabe-se que, num certo dia, o supermercado tem 160 pacotes de biscoitos daquela marca, dos quais oito não estão intactos.

a. Escolhendo, ao acaso, um dos 160 pacotes, qual é a probabilidade de ter pelo menos um biscoito partido?

b. Considere os acontecimentos:

I: «o pacote escolhido está intacto»

P: «o pacote escolhido tem pelo menos um biscoito partido».

Averigue se os acontecimentos *I* e *P* são independentes.

Sol. a. 0,13 b. não são independentes

5. Seja $(E\,,\mathcal{P}\,(E)\,,P)$ um espaço de probabilidades e $A\,,B \in \mathcal{P}\,(E)$ dois acontecimentos possíveis.

Utilizando a fórmula da probabilidade condicionada e as propriedades das operações com conjuntos, prova que:

$$P\left(\left(\overline{\overline{B} \cap A}\right)|A\right) = P(B|A)$$

6. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

a. Determina a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes.
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

b. Na mesma experiência aleatória, considera os acontecimentos:

A : «A 1.ª bola retirada é verde.»
B : «A 2.ª bola retirada é amarela.»
C : «O número da 2.ª bola retirada é par.»

O valor da probabilidade condicionada $P\big((B \cap C)\big|A\big)$ é $\frac{5}{19}$.

Num pequeno texto, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explica o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C)|A)$, no contexto da situação, e fazendo referência:

– à Regra de Laplace;
– ao número de casos possíveis;
– ao número de casos favoráveis.

Sol. a. $\frac{10}{19}$

b. $P\ (\ (B\ \cap\ C)\ |A)$ significa a probabilidade de a 2.ª bola retirada ser amarela e par, sabendo que a 1.ª bola foi verde. Se a 1.ª bola retirada foi verde, temos, então, agora, um total de 19 bolas na caixa (n.° de casos possíveis) das quais 5 (as bolas 12 , 14 , 16 , 18 e 20) são pares e amarelas (n.° de casos favoráveis). Então, pela regra de Laplace, sendo a probabilidade o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, obtém-se $\frac{5}{19}$.

7. Numa determinada população bovina, a percentagem de vacas é 45%. Sabe-se que 2% das vacas são portadoras de uma certa doença. A incidência da doença nos bois é 1%. Escolhe-se ao acaso um elemento da população.

Determina a probabilidade de ser um boi, sabendo que é portador da doença.

Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Sol. 38%

8. Considere o seguinte problema:

Um saco tem 14 bolas idênticas: três com o número 2, sete com o número 3 e quatro com o número 4.

Retiram-se do saco duas bolas ao acaso.

Qual é a probabilidade de a soma dos números das bolas ser igual a 6?

Uma resposta correta é: $\frac{3\times 4+\ ^7C_2}{^{14}C_2}$.

Numa pequena composição, explique o raciocínio que leva a esta resposta fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

Sol. Numa experiência aleatória em que os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento A e o número de casos possíveis — Lei de Laplace.

Nesta situação o número de casos possíveis é igual ao número de formas de selecionar duas bolas quaisquer das catorze disponíveis, ou seja, é $^{14}C_2$.

Para que a soma dos números das bolas extraídas seja seis, temos duas situações: sai uma bola com o número 2 e uma bola com o número 4 ou saem duas bolas com o número três. O número de formas de selecionar uma bola com o número 2 e uma bola com o número 4 é de 3×4. O número de formas de seleccionar duas bolas com o número 3 é de $^7C_2$. Assim sendo, o número de casos favoráveis é de $3\times 4+\ ^7C_2$.

Portanto, pela Lei de Laplace, a probabilidade de a soma dos números das bolas ser igual a 6 é de $\frac{3\times 4+\ ^7C_2}{^{14}C_2}$.

9. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- $\frac{7}{10}$ dos alunos vêm a série *Peaky Blinders*;
- metade dos alunos vêm a série *How I met your mother*;
- um em cada cinco alunos que vê a série *How I met your mother* não vê a série *Peaky Blinders*.

Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ver a série *Peaky Blinders* e não ver a série *How I met your mother.* Apresente o resultado na forma de dízima.

Sol. 0,3

10. De uma escola de Ensino Básico e Secundário, sabe-se que todos os seus alunos almoçam nas instalações da escola: uns optam pelo menu da cantina e os restantes trazem almoço de casa.

Sabe-se ainda que:

- 70% dos alunos frequentam o Ensino Secundário;
- 2 em cada 10 alunos que frequentam o Ensino Secundário almoçam todos os dias na cantina;
- um sexto dos alunos que frequentam o Ensino Básico opta por trazer o almoço de casa todos os dias.

Escolheu-se ao acaso um dos alunos desta escola para participar num debate.

Qual é a probabilidade de ter sido escolhido um aluno que frequenta o Ensino Básico ou que almoce na cantina, mas não ambos? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Sol. 19%

11. Tendo em vista a renovação dos quadros, o departamento de recursos humanos de uma empresa concluiu que:

- o número de trabalhadores que se encontram em condições de pré-reforma é igual a metade do número de homens que trabalham na empresa;
- seis em cada dez trabalhadores da empresa em condições de pré-reforma são homens;
- 75% das mulheres que trabalham na empresa **não** estão em condições de pré-reforma.

a. Mostre que em cada 18 trabalhadores da empresa, cinco estão em condições de pré-reforma.
b. Se a empresa tem 540 trabalhadores, quantos destes são mulheres?

Sol. a. Portanto, como $P(R)=\frac{5}{18}$, podemos concluir que cinco em cada 18 trabalhadores da empresa, estão em condições de pré-reforma. b. 240 mulheres

12. Uma caixa 1 contém várias bolas numeradas.
Uma caixa 2 contém 31 bolas numeradas com números pares e algumas bolas numeradas com números ímpares.

Considere a experiência que consiste em tirar simultaneamente e ao acaso duas bolas da caixa 1, colocá-las na caixa 2 e, em seguida, tirar, também ao acaso, uma bola da caixa 2.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: "A soma dos números das bolas tiradas da caixa 1 é um número ímpar"

B: "A bola retirada da caixa 2 tem um número ímpar"

Sabendo que $P(B\,|\,A)=\frac{1}{3}$, o número de bolas com número ímpar que inicialmente estavam na caixa 2 é:

(A) 18 **(B)** 15

(C) 12 **(D)** 9

Sol. (B)

13. Considere uma empresa em que, relativamente aos seus trabalhadores, se sabe que:

- dois em cada cinco são mulheres;
- 24% são mulheres do quadro da empresa (têm contrato de trabalho permanente);
- a terça parte dos homens não pertencem ao quadro (têm contrato de trabalho a prazo).

a. Escolhido, ao acaso, um trabalhador dessa empresa, determine a probabilidade de esse trabalhador

i. pertencer ao quadro da empresa, sabendo que é uma mulher;

ii. pertencer ao quadro da empresa;

iii. ser um homem sabendo que não pertence ao quadro da empresa.

b. Determine o número de trabalhadores da empresa, sabendo que 36 destes são mulheres que não pertencem ao quadro.

Sol. a. i. 0,6 ii 0,64 iii $\frac{5}{9}$ b. 225 trabalhadores

14. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathcal{P}(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos possíveis $\left(A, B \in \mathcal{P}(E)\right)$

Sabe-se que $P\left(\overline{B} \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right) = P\left(\overline{B}\right) + P\left(A \cap B\right)$

Qual é o valor de $P(A|B)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{2}{3}$

Sol. Opção: (C)

15. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}\ -\ 1} & \text{se} \quad x < 0 \\ k^2 - 5k + 4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{2x}{x+5} - 2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

a. Em qual das opções seguintes se encontra um valor real de k para o qual a função f é contínua?

(A) -2 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4

b. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

Sol. a. Opção (C) b. f não apresenta assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$.
$y = 0$ é assíntota não vertical, em particular, é assíntota horizontal ao gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

16. Seja o conjunto finito E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Sabe-se que $P\,(A) = 2\,(1 — P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Determine $P(B|A)$.

Sol. $\frac{1}{2}$

17. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{\sqrt{6-3x}} & \text{se} \quad x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \\ \frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+2x} & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

a. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função g não tem zeros.

(B) A função g tem um único zero.

(C) A função g tem exatamente dois zeros.

(D) A função g tem exatamente três zeros.

Opção (C)

b. Estude a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 2$.

c. Considere a função h, de domínio $]2, +\infty[$, definida por $h(x) = \frac{1}{g(x)}$.

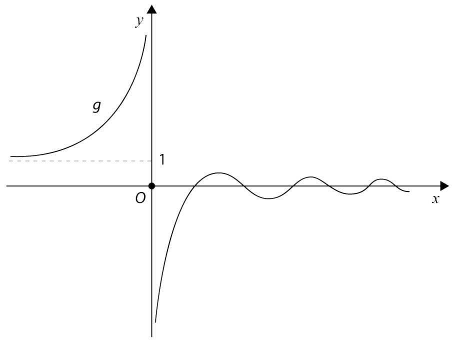
Estude a função h quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Sol. g é contínua em $x = 2$. A reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h quando $x \to +\infty$.

18. Na figura está a representação gráfica de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Considere a sucessão de termo geral $u_n = 2^n - 3^n$. Indique o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$.

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$



Opção (C)

19. Sejam f e g duas funções reais, ambas de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x - 1) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = \frac{f(x)+\sqrt{x}}{x}$.

Prove que o gráfico de g tem uma única assíntota horizontal e indique uma sua equação.

Sol. a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$ e é a única.

20. Seja g a função de domínio $[-9, +\infty[$ definida por:

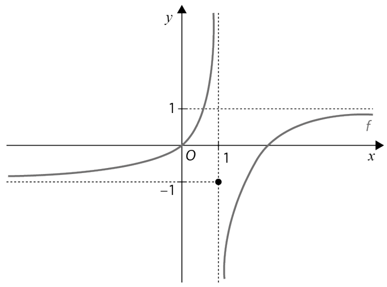
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + 9x^2}}{x^2 - 3x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{2x^2 + x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estude a função g quanto à continuidade no ponto de abcissa $x = 0$.

Sol. g não é contínua em $x = 0$.

21. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Indique o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$.



(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

Sol. Opção (D)

22. Sejam f e g duas funções reais ambas de domínio $]-\infty, -1]$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$;
- a função g é definida por $g(x) = \frac{f(x)+x}{x-1}$.

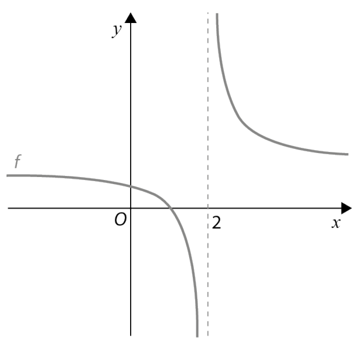
Prove que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal e indique uma sua equação.

Sol. a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal ao gráfico de g

23. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função racional f, cujo domínio é $\mathbb{R} \backslash \{2\}$. A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Considere a sucessão de termo geral $x_n = \frac{2n-1}{n}$. Seja $u_n = f(x_n)$.

Qual dos seguintes é o valor de $\lim u_n$?



(A) 2 (B) 0 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Opção (D)

24. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, sendo f uma função polinomial de grau 3 e g uma função racional. O gráfico de f interseta o eixo Ox nos pontos de abcissas 0, 1 e 2. As retas de equações $x = 1$ e $y = 0$ são assíntotas ao gráfico de g.

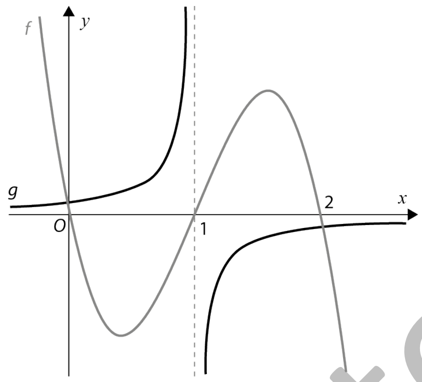
Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(B) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(C) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(D) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$



Opção (C)

25. Seja f a função, de domínio $[0, +\infty[\setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{n-1}{n}$.

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 0 **(C)** $-\infty$ **(D)** 1

Sol. (c)

26. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k + \dfrac{2}{x-1} & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} & se \quad x > 0 \wedge x \neq 2 \end{cases}$$

a. Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 0$.

b. Considere agora $k = 0$. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico.

Sol. $k = \frac{7}{2}$ A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$. A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

27. Seja f uma função, de domínio e contradomínio $\mathbb{R}^+$, tal que a reta de equação $y = 3x - 2$ é assíntota ao seu gráfico. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{x^2}{f(x)}$.

Mostre que a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ é assíntota ao gráfico de g.

28. Na figura está a representação gráfica de uma função f, da qual a reta r é uma assíntota. Sabe-se ainda que os pontos (0, 6) e (3, 0) são pontos da reta r.

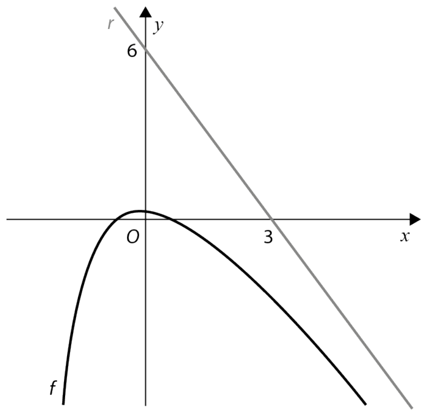
Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x)=6$

(B) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2x-6)=0$

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-6)$



Sol. opção (D)

29. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+8}} & \text{se } x\leq 1\\ \frac{2x^2-2}{x^2-2x+1} & \text{se } x>1\end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

a. Averigúe se existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

b. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

Sol. Não existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

$y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

$y=2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

30. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, definida por:

$$f(x)\begin{cases}\frac{x^2-4}{x+3} & se\ x<-3\\ \frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3} & se\ -3\leq x<3\\ \frac{1-\frac{3}{x}}{|-2x+6|} & se\ x>3\end{cases}$$

a. Estude a função f quanto à continuidade.

b. Determine, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico de f.

sol. a. f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$ b. a reta de equação $x=-3$ e uma assíntota vertical ao gráfico de f.

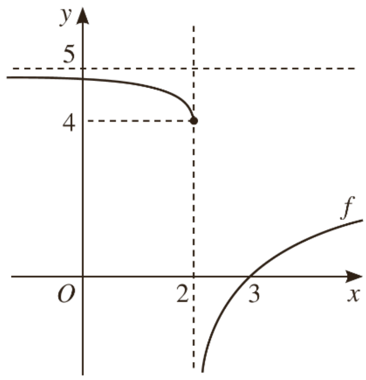
$y=x-3$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

$y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

31. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f* de domínio IR.

Sabe-se que:

- $y = 5$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f ;
- $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ;
- f é contínua em $IR \setminus \{2\}$.



Considere a sucessão (a_n)) definida por $a_n = \frac{1 + 2n}{n}$

Qual é o valor de $lim\, f(a_n)$?

(A) $-\infty$

(B) 2

(C) 4

(D) 5

Sol. Opção (A)