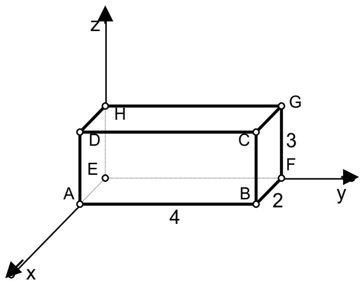
MATEMÁTICA 10º ANO

Revisões Exercícios no Espaço--------------Prof. Mónica Pinto

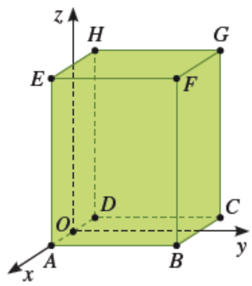
1. Considera, num referencial o.n. Oxyz, o paralelepípedo [ABCDEFGH] de dimensões 4, 3 e 2, representado na figura ao lado.
   a) Indica as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.
   b) Escreve uma condição que defina o plano ABC.
   c) Escreve uma condição que defina a reta CG.
   d) Escreve uma condição que defina o segmento de reta [DC].
   e) Escreve as coordenadas do ponto simétrico de C relativamente ao plano xOy.



Sol. a.)A (2, 0, 0) , B (2, 4, 0), C (2, 4, 3), D (2, 0, 3), E (0, 0, 0), F (0, 4, 0), G (0, 4, 3), H (0, 0, 3) b) $x = 2$ c)$y = 4 \land z = 3$. d))$x = 2 \land z = 3 \land 0 \leq y \leq 4$.
e) C' (2, 4, -3)

2. No referencial Oxyz está representado um paralelepípedo reto:
   - a face [AEHD] está contida no plano y = 0 ;
   - a origem do referencial é o ponto médio de [AD] ;
   - F tem coordenadas (1, 3, 5) e A e D pertencem ao eixo Ox .

   a) Indica as coordenadas dos outros vértices do paralelepípedo.
   b) Escreve uma condição que defina:
      I. o plano FGC ;
      II. a reta AB ;
      III. a aresta [FG]
   c) Determina uma equação reduzida da superfície esférica de centro em B e que passa por G .
   d) Determina uma equação do plano mediador de [CE].
      Apresenta a equação na ax+ by + cz + d = 0, em que *a* , *b* , *c* e *d* são números reais.

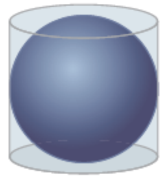


a.$A(1,0,0); B(1,3,0); C(-1,3,0); D(-1,0,0); E(1,0,5); G(-1,3,5) e\ H(-1,0,5)$ b. I. $y = 3$ II. $x = 1 \land z = 0$
III. $y = 3 \land z = 5 \land -1 \leq x \leq 1$ b. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 29$ c.$2x - 3y + 5z - 8 = 0$

3. Num referencial o.n. *Oxyz*, considere os pontos *A* (3,2,1), *B* (2,–1,3) e *C* (3,–4,2*k*).
   a. Determine o valor de *k,* tal que a distância de *A* a *C* é 10.
   b. Escreva a equação da superfície esférica de centro *B* e que contém *A*.
   c. Determine as coordenadas do ponto do semieixo positivo *Oy* cuja distância a *A* é igual ao raio da superfície esférica determinada em b.

Sol. a. $k = -\frac{7}{2} \lor k = \frac{9}{2}$ b. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$ c. P(0,4,0)

4. Num referencial ortonormado $Oxyz$, a condição $x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 6z \leq 3$ define uma esfera inscrita num cilindro. Seja C o centro da esfera e h a altura do cilindro. Então:



(A) C(–2, 0, 3) e h = 4. (B) C(2, 0, –3) e h = 4. (C) C(2, 0, –3) e h = 8 (D) C(–2, 0, 3) e h = 8

Sol c.

5. Considera, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0$$

a. Indica o centro *C* e o raio da superfície esférica.

b. Determina expressões analíticas que definam a interseção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:

  i. o eixo *Ox*;

  ii. o plano de equação *z* = 4;

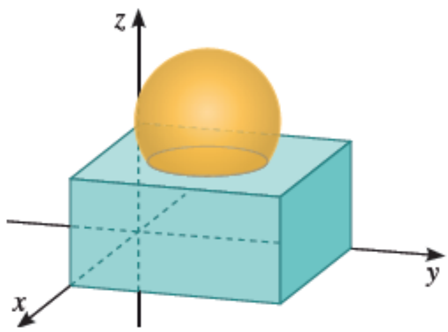
  iii. o plano de equação *y* = –4.

c. Prove que o ponto A(0, 0, 2) pertence à superfície esférica e determine a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

Sol. a. Centro: C(2, -1, 4), Raio: r = 3 b. i Pontos: (-1, 0, 0) e (5, 0, 0). ii. Circunferência de centro em (2, -1, 4) e raio 3, contida no plano z = 4 iii. Ponto: (2, -4, 4). c. r=$\overline{AC} = 3$. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 9$

6. Na figura está representado, num referencial ortonormado Oxyz , um sólido que pode ser decomposto num prisma quadrangular regular e num sólido que é parte de uma esfera. As duas partes em que o sólido representado pode ser decomposto têm em comum um círculo de raio 8 , cujo centro é também o centro da base superior do prisma.

Sabe-se ainda que:



- uma das arestas do prisma está contida no eixo Ox , outra no eixo Oy e outra no eixo Oz ;
- um dos vértices do prisma tem coordenadas (30, 30, 15) ;
- o ponto do sólido que tem cota máxima igual a 31 .

a) Defina, por meio de uma condição, a face do prisma que está contida no plano xOz .

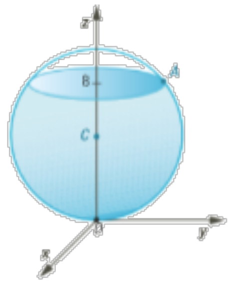
b) Escreva uma equação do plano mediador da diagonal espacial do prisma que tem a origem do referencial como um dos extremos. Apresente a sua resposta na forma ax + by + cz = d , em que a , b , c e d designam números reais.

c) Determine o raio da esfera e as coordenadas do seu centro, e escreva a sua inequação reduzida.

Adaptado do GAVE: Série Problemas Matemática A do 10.º ano

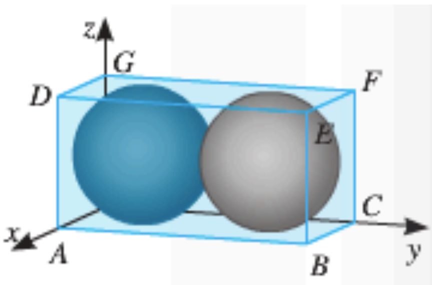
Sol. a.$0 \leq x \leq 30 \wedge 0 \leq z \leq 15 \wedge y = 0$ b.$4x + 4y + 2z = 135$ c. Esfera:$(x-15)^2 + (y-15)^2 + (z-21)^2 \leq 100$

7. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura, encontra-se representado um reservatório esférico de raio 5 e tangente ao plano coordenado xOy. A cota da superfície superior do líquido é 8.
   a. Determina as coordenadas do ponto A do reservatório, sabendo que este pertence ao plano yOz e à superfície líquido.
   b. Define a superfície superior do líquido através de uma condição



Sol. a. $\overline{AB} = 4, A(0,4,8)$ b. $x^2 + y^2 + (z-5)^2 \leq 25 \wedge z = 8$

8. No referencial o.n. com origem O, estão representados um prisma reto e duas esferas geometricamente iguais tangentes entre si e tangentes às faces do prisma.
   O prisma tem a face $[AOGD]$ contida em xOy e a face $[BCEF]$ contida no plano de equação $y = 20$.
   a) Escreve uma inequação que defina a esfera à esquerda na figura.
   b) A reta definida pelo sistema $y = 15 \wedge z = 10$, interseta uma da superfícies esféricas num ponto. Determina as coordenadas desse ponto.
   c) Determina o perímetro do circulo que é a interseção da esfera à esquerda na figura com o plano de equação$x = 7$



Sol. a. $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 \leq 25$, b. $(x-5)^2 + (y-15)^2 + (z-5)^2 = 25,\ P(5,15,10)$
d. circulo $(y-5)^2 + (z-5)^2 \leq 21\ \wedge x = 7$, $Perímetro = 2\sqrt{21}\pi$

9. Considera , fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica S de equação:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$$

   a) Identifica a interseção da superfície esférica S com o plano de equação $x = 5$.
   b) Determina os valores de a para os quais o plano de equação $y = a$ tem interseção não vazia com a superfície esférica.
   c) Determina para que valores reais de b a interseção da superfície esférica S com o plano de equação $z = b$ é uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

Sol. a. circunferência C(5,-2,3) e r=3 contida no plano $x = 5$; b. $\left[-2-\sqrt{10}\,, -2+\sqrt{10}\right]$ c. $3 \pm \sqrt{2}$