Tema: Geometria Analítica **Subtema**: Geometria Analítica no plano

1. Considera em $\mathbb{R}^2$ o ponto $A=\left(\frac{-p}{3}+5,-1-p\right)$, com $p \in \mathbb{R}$. Para que o ponto A esteja situado no 1º quadrante, p deverá pertencer a :

(A) $]-1\,,15[$ (B) $]-\infty,-1[$ (C) $]-1,+\infty[$ (D) $]-\infty,15[$

Sol. B

2. A condição $x \geq -2 \;\Lambda\; y > 3$ define, em, $\mathbb{R}^2$ uma região sombreada.

Um ponto P que pertença a essa região, pode ter coordenadas:

(A) $(-2\,,3)$ (B) $(-2\,,\pi)$ (C) $(-1\,,3)$ (D) $(-3\,,\sqrt{7})$

Sol. B

3. Num plano munido de um referencial o.n. considere o segmento de reta $[AB]$.

Sabe-se que $M\left(1\,,\frac{1}{3}\right)$ é o ponto médio de $[AB]$ e que A tem de coordenadas $(0,2)$.

Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

Sol. $\boldsymbol{y=\frac{3}{5}x-\frac{4}{15}}$

4. Considere, num referencial o.n. Oxy, os pontos $A\,(-2\,,1)$ e $B\,(2\,,-3)$.

4.1. Calcule a distância entre os pontos A e B.

4.2. Determine a equação reduzida da reta mediatriz de $[AB]$.

4.3. A equação $x^2+y^2-4x+6y+12=0$, representa uma circunferência cujo centro é um dos pontos dados. Determine qual é esse ponto e o valor do raio da circunferência.

Sol. 4.1 $4\sqrt{2}$ 4.2 $y=x-1$ 4.3 ponto B e $r=1$

5. Num plano munido de um referencial o.n. considere os pontos $A(1,0)$, $B(2,-5)$ e $C(3,4)$. Escreve a equação reduzida da circunferência:

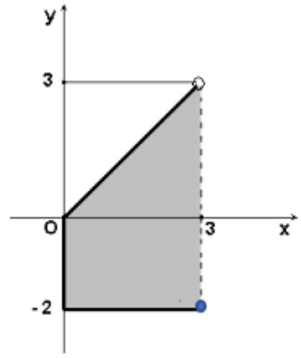
5.1. que tem centro em A e passa por C ;

5.2. Que tem por diâmetro o segmento de reta $[AB]$;

5.3. Que tem centro em C e raio $\overline{AB}$.

Sol. 5.1 $\boldsymbol{(x-1)^2+y^2=20}$ **5.2** $\boldsymbol{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{2}}$ **5.3** $\boldsymbol{(x-3)^2+(y-4)^2=26}$

6. Em $\mathbb{R}^2$, uma condição que define o conjunto de pontos representado a sombreado na figura, é:



(A) $y \geq x \wedge x > 3 \wedge y \leq -2 \wedge x \leq 0$

(B) $y \leq x \wedge x < 3 \wedge y \geq -2 \wedge x \geq 0$

(C) $(y \leq x \wedge x < 3 \wedge y \geq -2 \wedge x \geq 0) \vee (x = 3 \wedge y = -2)$

(D) $(y \leq -x \wedge x < 3 \wedge y \geq -2 \wedge x \geq 0) \vee (y = 3 \wedge x = -2)$

Sol. C

7. Considere, no plano, os seguintes pontos:

$$A\left(3,2\right) \quad ; \quad B\left(0,-3\right) \quad \text{e} \quad C\left(-2p, p^2\right)$$

7.1. Calcule as coordenadas do ponto médio de $\left[AB\right]$.

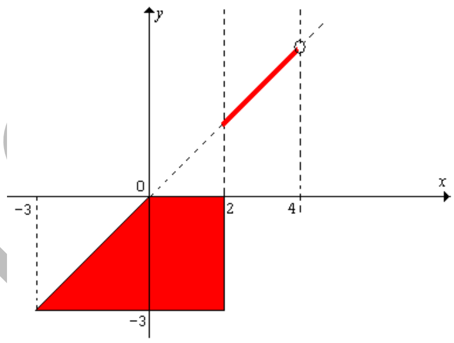
7.2. Determine uma equação da reta mediatriz de $\left[AB\right]$.

7.3. Determine $p \in \mathbb{R}$, de modo que o ponto C pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

7.4. Determine as coordenadas de um ponto H pertencente à reta de equação $y = 5$ de modo que, na unidade considerada, $\overline{AH} = 5$.

sol. 7.1) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 7.2) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}$ 7.3) $p = 0 \vee p = 2$ 7.4) $\left(7, 5\right)$ ou $\left(-1, 5\right)$

8. Escreva uma condição que caracterize o conjunto de pontos do plano representado a sombreado na figura seguinte:



Sol. $(y \leq x \wedge y \geq -3 \wedge x \leq 2 \wedge y \leq 0) \vee (y = x \wedge 2 \leq x < 4)$

9. Sabe-se que o ponto $P\left(k,1\right)$ pertence à circunferência de equação $\left(x-1\right)^2 + \left(y+1\right)^2 = 4$.

Qual é o valor de k?

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 4

Sol. A

10. Mostra que a equação $x^2 + 2x + y^2 - 8y = 8$ é uma equação de uma circunferência de centro no ponto de coordenadas $(-1, 4)$ e raio 5.

11. Determina as coordenadas do centro e o raio da circunferência definida pela equação
$x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$

Sol C(3,-2) e raio = 4

12. Identifica o lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto $A(-1, 2)$ é igual ao dobro da distância ao ponto $B(5, 2)$.

Sol. circunferência de centro (7,2) e raio = 4

13. Considera o ponto $P(\,1 + 4k\,, 5k - 6)$, com $k \in \mathbb{R}$. Determina para que valor(es) de k se verifica que:

13.1. P pertence a uma reta que passa por $C(2\,, 4)$ e é paralela ao eixo das abcissas;

13.2. P pertence a uma reta que passa por $A(-5\,, 4)$ e é paralela ao eixo das ordenadas;

13.3. P pertence ao 4º quadrante;

13.4. P pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

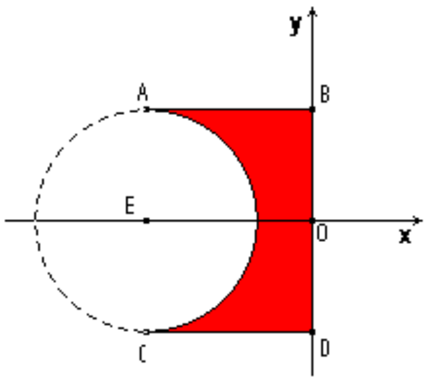
Sol. 13.1 $K = 2$. 13.2 $k = -\frac{3}{2}$ 13.3 $k \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{6}{5}\right[$ 13.4 $k = \frac{5}{9}$

14. Determina $k \in \mathbb{R}$ por forma a que o ponto $A(k^2 + 6\,,\ 5k)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Sol. $k = 2 \ \vee \ k = 3$

15. A figura representa, em referencial o.n. Oxy :

- a circunferência de equação $x^2 + 6x + y^2 + 5 = 0$;
- o ponto E , centro da circunferência;
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$, paralelos ao eixo das abcissas e tangentes à circunferência em A e C, respetivamente.



15.1. Determina o centro e o raio da circunferência.

15.2. Considere o ponto $P\left(k-7, \sqrt{3}\right)$. Determine $k \in$ IR, de forma que o ponto P pertença à circunferência.

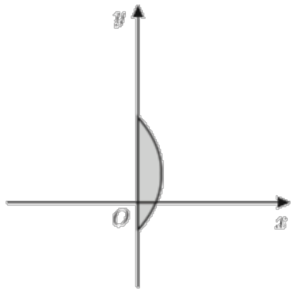
15.3. Escreva uma condição que caracterize a região do plano sombreada na figura.

Sol. 15.1. $centro\ (-3{,}0)\ \ r = 2$, 15.2. $k = 5 \ \vee k = 3$ 15.3. $(x+3)^2 + y^2 \geq 4 \wedge -3 \leq x \leq 0 \wedge -2 \leq y \leq 2$.

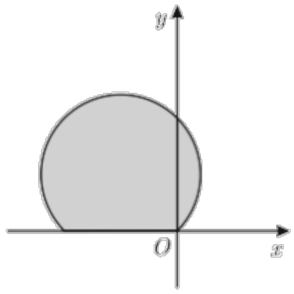
16. Considera a condição $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \wedge x \geq 0$.

Em qual das opções seguintes está representado, em referencial o.n Oxy, o conjunto dos pontos definidos por esta condição?

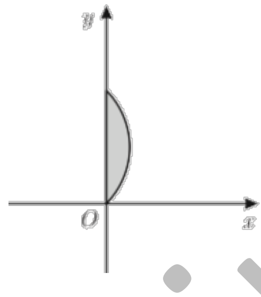
A.



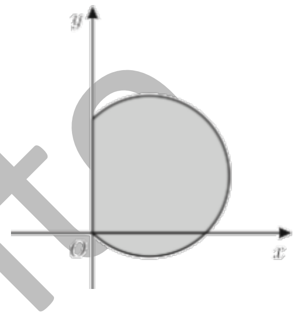
B.



C.



D.

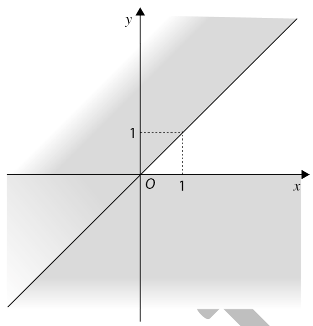


Sol. C

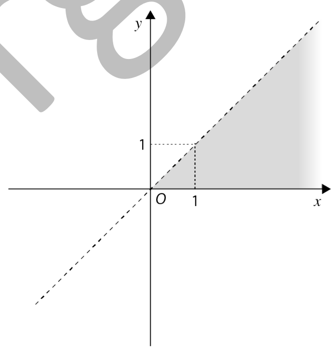
17. No plano munido de um referencial o.n. Oxy, considere o conjunto de pontos definido pela condição $\sim(y < 0 \vee y \geq x)$.

Em qual das opções seguintes se encontra esse conjunto de pontos representado?

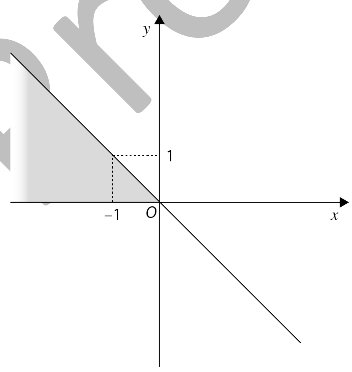
(A)



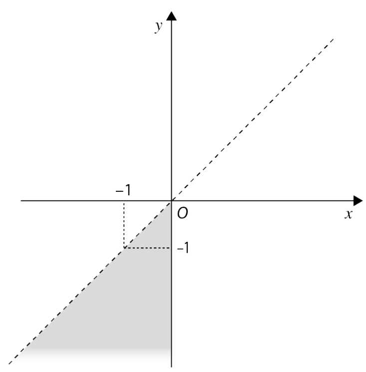
(B)



(C)



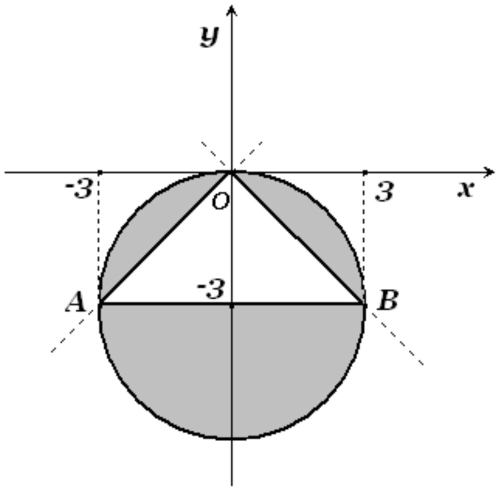
(D)



Sol. B

18. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. Oxy:

- parte da reta que contém a origem e o ponto $A(-3,-3)$.
- parte da reta que contém a origem e o ponto $B(3,-3)$.
- a circunferência onde os pontos A e B são extremos de um diâmetro.



Qual das condições seguintes pode definir o conjunto de pontos do plano representado a sombreado na figura?

(A) $y \geq x \wedge y \geq -x \wedge y \leq -3 \wedge x^2+(y+3)^2 \leq 9$

(B) $(x+3)^2+y^2 \leq 9 \wedge (y \geq x \vee y \geq -x \vee y \leq -3)$

(C) $(y \geq x \vee y \geq -x \vee y \leq -3) \wedge x^2+(y+3)^2 \leq 9$

(D) $y \leq x \wedge y \leq -x \wedge y \leq -3 \wedge x^2+(y+3)^2 \leq 9$

Sol. C

19. Considera num plano onde está instalado um referencial ortonormado xOy , os pontos $A(7,4)$, $B(3,12)$ e $C(5,-2)$.

Escreve a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos *A* , *B* e *C.*

$\boldsymbol{sol.}$ $\boldsymbol{(x+3)^2+(y-4)^2=100}$

20. Num plano em que está fixado um referencial o.n. considera os pontos $A(-2,3)$, $B(4,-1)$ e $C(3,4)$.

20.1. Escreve a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

20.2. Mostra que o ponto C pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

20.3. Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Sol. 20.1 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ 20.2 $4=\frac{3}{2}\times 3-\frac{1}{2}$ $\acute{e}\ uma\ proposição\ verdadeira.$ 20.3. 13 u.a

21. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos $P(1,2)$, $Q(-2,-2)$ e $R(k,k-1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

21.1. Escreva uma equação reduzida da reta paralela à bissetriz dos quadrantes pares e que contém o ponto médio de $[PQ]$.

21.2. Determine o valor de k de modo que R:

21.2.1. Pertença ao 4º quadrante;

21.2.2. pertença à reta PQ;

21.2.3. pertença à mediatriz de $[PQ]$.

Sol. $\left(\frac{1+(-2)}{2},\frac{2+(-2)}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right)$ **21..1** $y=-x-\frac{1}{2}$ **21.2.1** $k \in]0,1[$ **21.2.2** $k=-5$ **20.2.3** $k=\frac{5}{14}$

22. Dados os pontos $F(-2,4)$ e $B(6,4)$, indica as coordenadas do ponto equidistante de F e de B que pertence aos eixos das abcissas.

Sol: $(2,0)$

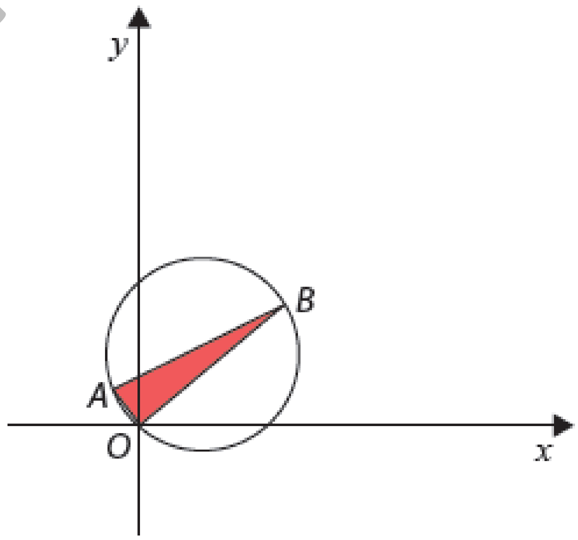
23. Um triângulo isósceles tem por base $[AB]$, em que $A(3,-1)$ e $B(5,3)$. Determina as coordenadas do outro vértice C, do triângulo, sabendo que pertence à reta de equação $y=-x$.

Sol: $C(-6,6)$

24. Na figura está representada, num referencial ortogonal e monométrico xOy, uma circunferência que passa nos pontos A, O e B.

Sabe-se que:

- a semirreta $\dot{O}B$ é a bissetriz do 1.º quadrante;
- a semirreta $\dot{O}A$ é a bissetriz do 2.º quadrante;
- a ordenada de A é igual a um quinto da ordenada de B;
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5 u.a.;
- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.



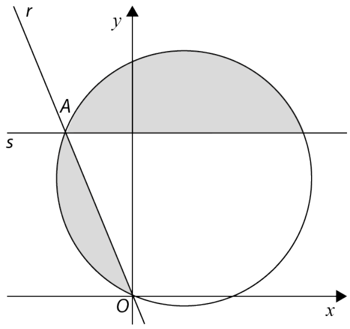
Determine:

24.1. as coordenadas dos pontos A e B;

24.2. uma equação cartesiana da circunferência de diâmetro $[AB]$.

Sol. 24.1 $A(-1,1)$ $B(5,5)$ **24.2** $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

25. Na figura encontram-se representadas, em referencial o.n. xOy, as retas r e s e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 10y = 0$



Sabe-se que a reta r passa no ponto $A(-3, 7)$ e na origem do referencial e que a reta s passa no ponto A e é paralela ao eixo Ox.

25.1. Determine as coordenadas do centro da circunferência e o seu raio.

25.2. Represente através de uma condição a região sombreada, incluindo a sua fronteira.

25.3. Seja B o ponto de coordenadas $(2, -5)$. Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

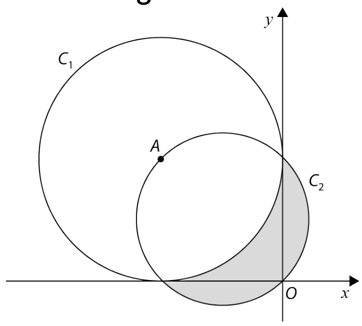
Sol. 25.1C (2, 5) e $r = \sqrt{29}$. 25.2 $(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \wedge \left(y \geq 7 \vee y \leq -\frac{7}{3}x\right)$ 25.3 $y = \frac{5}{12}x + \frac{29}{24}$

26. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, duas circunferências C_1e C_2.

Sabe-se que:

- a circunferência C_1 tem centro no ponto $A(-3, 3)$ e é tangente aos eixos coordenados;
- a circunferência C_2 tem centro no ponto médio de $[OA]$ e contém a origem do referencial.

Qual das seguintes condições define a região a sombreado?



(A) $(x-3)^2 + (y+3)^2 \geq 9 \wedge \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$

(B) $(x+3)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \wedge \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$

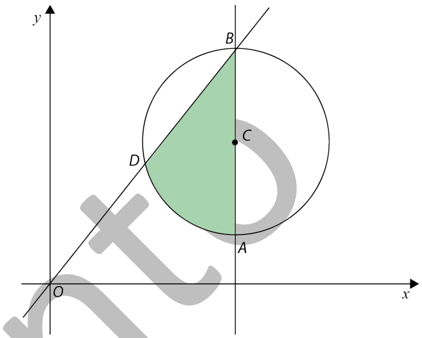
(C) $(x+3)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \wedge \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}$

(D) $(x+3)^2 + (y-3)^2 \geq 3 \wedge \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{2}$

Sol. Opção C

27. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy:

- a circunferência de centro C, de equação $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ e que passa pelos pontos A, B e D;
- a reta AB, perpendicular ao eixo Ox e que passa pelo centro C da circunferência
- a reta OB, que passa pelo ponto D



a) Determine as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

b) Defina através da equação reduzida o conjunto de pontos P tais que $\overline{OP}=\overline{CP}$.

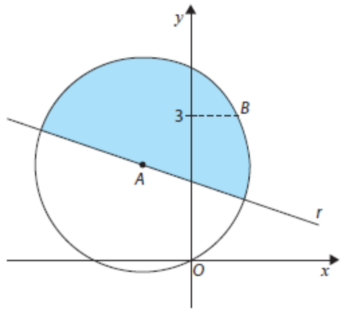
c) Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

$\boldsymbol{sol.}\, a.\, (\frac{7+\sqrt{7}}{2}, \frac{7+\sqrt{7}}{2})\; e\; (\frac{7-\sqrt{7}}{2}, \frac{7-\sqrt{7}}{2}) \quad b.\, y=-\frac{4}{3}x+\frac{25}{6} \quad c.\, (x-4)^2+(y-3)^2 \leq 4 \wedge x \leq 4 \wedge y \leq \frac{5}{4}x$

28. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy:

- a circunferência de centro $A\,(-1,2)$ que passa na origem do referencial;
- o ponto B que pertence à circunferência e tem ordenada 3 e abcissa positiva;
- a reta r, mediatriz de $[OB]$.

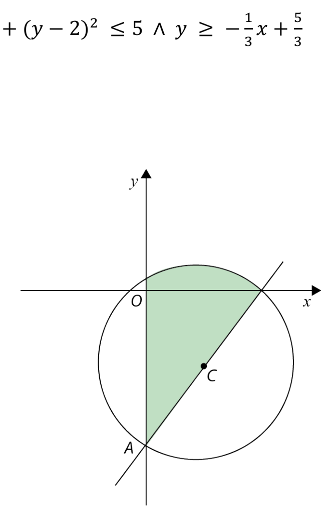
Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.



Sol. $(x+1)^2+(y-2)^2 \leq 5 \wedge y \geq -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

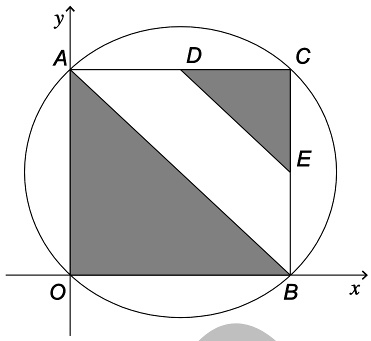
29. Na figura estão representadas, num referencial o.n., Oxy a circunferência de centro C definida por $x^2+y^2-4x+6y=3$ e a reta AC. Sabe-se ainda que A é um dos pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas.

Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.



Sol. $(x-2)^2+(y+3)^2 \leq 16 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq \sqrt{3}x-3-2\sqrt{3}$

30. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência definida pela equação $(x-2)^2+(y-2)^2=8$, circunscrita ao quadrado [*AOBC*].



Sabe-se que:

- os vértices *A* e *B* do quadrado pertencem aos eixos coordenados;
- a reta *AB* é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa pelo centro da circunferência;
- [*ADEB*] é um trapézio isósceles;
- *D* é o ponto médio de [*AC*].

30.1. Determina as coordenadas de todos os vértices do quadrado.

30.2. Determina uma equação reduzida da reta *AB*.

30.3. Escreve uma condição que defina a região do plano a sombreado, incluindo a fronteira.

Sol. 30.1 *A*(0, 4), *O*(0, 0), *B*(4, 0) e *C*(4, 4)   30.2 $y=-x+4$ 30.3 $(x\geq 0\ \wedge\ y\geq 0\ \wedge\ y\leq -x+4)\ \vee (x\leq 4\ \wedge\ y\leq 4\ \wedge\ y\geq -x+6)$

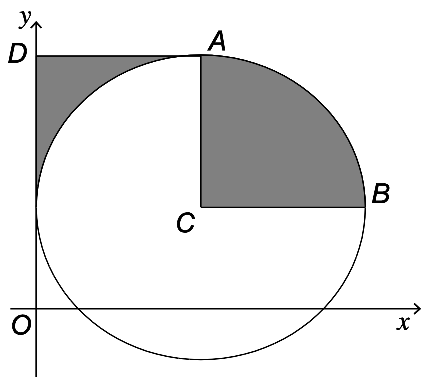
31. Considera, num referencial o.n. xOy, o ponto $P(k,k-1)$, $k\in\mathbb{R}$. Sejam $A(1,2)$ e $B(-2,-2)$. Qual é o valor de k de modo que a distância entre A e P seja igual à distância entre B e P?

(A) $\frac{5}{14}$ **(B)** $-\frac{5}{14}$ **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

Sol A

32. Na figura está representada, num referencial o.m. xOy, a circunferência de centro $C(3,2)$ e raio 3.
Os segmentos de reta [*AD*] e [*BC*] são paralelos ao eixo Ox e o segmento de reta [*AC*] é paralelo ao eixo Oy.

Escreve uma condição que defina a região representada a sombreado, incluindo a fronteira.



Sol.$((x-3)^2+(y-2)^2\geq 9\ \wedge\ \ 0\leq x\leq 3\ \wedge\ \ 2\leq y\leq 5\,)\vee((x-3)^2+(y-2)^2\leq 9\ \wedge x\geq 3\wedge\ \ y\geq 2)$

33. Considera, num plano munido de um referencial o.n. xOy, os pontos de coordenadas $A(-1,2)$, $B(-3,6)$ e $C(2,-3)$.

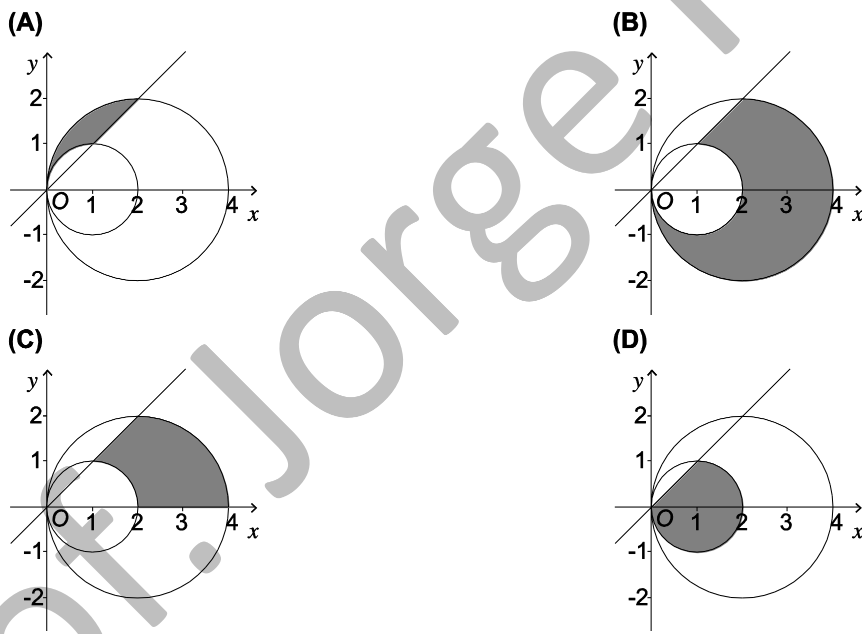
33.1. Determina uma equação da mediatriz de [*AC*]. Apresenta a resposta na forma $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

33.2. Escreve uma equação da circunferência de centro no ponto médio de [*AB*] e que passa pelo ponto C.

33.3. Escreve uma equação da circunferência, circunscrita ao triângulo [*ABC*].

Sol. 33.1 $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$ 33.2 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 65$ 33.3 $(x-58)^2 + (y-34)^2 = 4505$

34. Qual dos seguintes conjuntos de pontos do plano (indicados a sombreado) pode ser definido pela condição $(x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge y \leq x$?



Sol. B

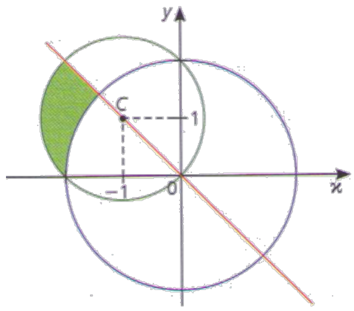
35. No referencial, estão representadas duas circunferências e a bissetriz dos quadrantes pares.

Escreve uma equação da circunferência:

35.1.De centro C e que passa por O;

35.2.De centro em O representada na figura;

35.3.Define analiticamente a região sombreada



Sol. 35.1 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 35.2 $x^2 + y^2 = 4$ 35.3 $(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \geq 4 \ \wedge \ y \leq -x$