

MATEMÁTICA 12º ANO

RESUMO Limites de funções -----PROF. MÓNICA PINTO

Ponto aderente a um conjunto:

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um ponto aderente ao conjunto A quando existe uma sucessão (u_n) de elementos de A tal que $\lim u_n = a$

Ao conjunto dos pontos aderentes a A chama-se **aderência de A** e representa-se por \bar{A} .

- A aderência de um intervalo é sempre esse intervalo fechado, isto é, $A =]a, b[$, $\bar{A} = [a, b]$
- Todos os pontos isolados de um conjunto pertencem à aderência desse conjunto. $A = \{a, b\}$, $\bar{A} = \{a, b\}$
- A aderência de um conjunto formado por termos de uma sucessão : são todos os termos da sucessão e a sucessão for convergente também o limite da sucessão pertence à aderência.

Limite de uma função segundo Heine:

Seja a um ponto aderente ao domínio de uma função f . Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se e somente se para qualquer sucessão (x_n) , em que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \in D_f$ e $\lim x_n = a$ se tem $\lim f(x_n) = L$.

Exemplo: Provar, usando a definição de limite de uma função que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ sendo f uma a função real de variável real definida por $f(x) = 3x + 1$.

Resolução: Como $D_f = \mathbb{R}$, $2 \in \bar{D}_f$. Seja (x_n) uma qualquer sucessão em que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n) \in D_f$ e $\lim x_n = 2$. Então $\lim f(x_n) = \lim(3x_n + 1) = 3 \times 2 + 1 = 7$, logo $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

O limite se existir tem de ser único, isto é, os limites laterais têm de existir e serem iguais:

- Se $a \in D_f$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = b$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$
- Se $a \notin D_f$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, então $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

Propriedades dos limites:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

4. $\frac{k}{\pm\infty} \rightarrow 0$ 5. $\frac{k}{0^\pm} \rightarrow \pm\infty$

Indeterminações :

$\frac{\infty}{\infty}$
Quociente de polinómios : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + \dots + a_n}{b_0 x^n + \dots + b_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n}$ (isto é : selecionar termos de maior grau no numerador e no denominador ou colocar em evidência o termo de maior grau no numerador e no denominador)

Quocientes com radicais ($\sqrt{\quad}$) : : Ou multiplicar e dividir pelo conjugado ou passar tudo para dentro da $\sqrt{\quad}$, ou ainda, colocar os termos de maior grau em evidência que estão dentro da $\sqrt{\quad}$, ou ainda dividir todos termos por x .

Nota: $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Obs: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$

Exponenciais: Dividir todos os termos pela potência de maior base,
 Se $0 < a < 1$, $a^{+\infty} \rightarrow 0$, $a^{-\infty} \rightarrow +\infty$, $a > 1$, $a^{+\infty} \rightarrow +\infty$, $a^{-\infty} \rightarrow 0$

$\frac{0}{0}$

Polinómios : Decompor em fatores: Se todos os termos tiverem x , colocar o x de menor grau em evidência; caso contrário, recorrer à **regra do Ruffini**. Ou ainda se conhecermos os zeros do polinómio fatorizar diretamente. (Ex: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \text{"zero}_1\text{"}) \cdot (x - \text{"zero}_2\text{"})$)

Radicais ($\sqrt{\quad}$): Regra geral, multiplicar e dividir pelo conjugado.

$0 \cdot \infty$

Transformar $0 \cdot \infty \rightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$

Polinómios : Colocar em evidencia o termo de maior grau ou escolher o termo de maior grau .

Frações : efectuar operações

Radicais ($\sqrt{\quad}$) :Regra geral, multiplicar e dividir pelo conjugado.

Exponenciais: Colocar em evidência a potência de maior base.

Limites com módulos: É necessário desenvolver o módulo em função por ramos, para saber que ramo usar.

Nota: Escrever um módulo numa função por ramos: $a|f(x)| + k = \begin{cases} af(x) + k & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -af(x) + k & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

Limites notáveis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO $x = a$

Uma função $f(x)$ é contínua num ponto a ($a \in D_f$) se e só se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Ou seja, uma função é contínua num ponto do seu domínio se existir limite da função nesse ponto.

Continuidade Lateral : f é contínua à direita de a se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

f é contínua em a se for contínua à direita e à esquerda de a .

Pontos de descontinuidade : são pontos do domínio onde a função não é contínua.

A soma, produto, quociente, composta..... de funções contínuas é função contínua.

TEOREMAS

Teorema de Bolzano-Cauchy :

uma função contínua num intervalo não passa de um valor ao outro sem passar pelos intermédios, Isto é, se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) < k < f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = k$.

Corolário : é contínua em $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]a, b[$.

Teorema de Weierstrass:

Uma função real de variável real f , contínua num intervalo $[a, b]$ admite um máximo e um mínimo absolutos.

Teorema de Lagrange:

Dada uma função real de variável real f , contínua num intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Prof. Mónica Pinto