Resolução da ficha Radicais; Mediatrizes e Circunferências-------prof. Mónica Pinto

1. **Opção (B)**

$$\frac{x^2}{\sqrt[10]{x^8}} = \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^8}\times\sqrt[10]{x^2}} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^{10}}} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt[10]{x^2}}{x} =$$

$$= x\sqrt[10]{x^2}$$

2. Q

3. $A_{\text{retângulo}} = 2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} =$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\times(\sqrt{5}+1)}{4} =$$

$$= \sqrt{15}+\sqrt{3}$$

A área da bandeira é $(\sqrt{15}+\sqrt{3})$ m^2.

3.2 $A_{\text{círculo}} = \pi\times r^2$, onde $r = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$.

Assim:

$$A_{\text{círculo}} = \pi\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}+1^2} =$$

$$= \frac{\pi}{6-2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\pi\left(6+2\sqrt{5}\right)}{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{6^2-(2\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{36-4\times5} =$$

$$= \frac{2\pi(3+\sqrt{5})}{16} =$$

$$= \frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8}$$

A área do círculo representada na bandeira é $\frac{\pi(3+\sqrt{5})}{8}$ m^2.

4. **Opção (C)**

$$\sqrt{3}x = 4 + 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2x = 4$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3} - 2\right)x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}-2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\left(\sqrt{3}+2\right)}{(\sqrt{3}-2)\left(\sqrt{3}+2\right)}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{(\sqrt{3})^2-2^2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+8}{3-4}$$
$$\Leftrightarrow x = -8 - 4\sqrt{3}$$

Assim, $a = -8$ e $b = -4$.

5. **Opção (B)**

Como $d(P, Q) = d(P, R)$, vem que:

$$\sqrt{(k-1)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-1+2)^2}$$

isto é:

$$(k-1)^2 + (k-3)^2 = (k+2)^2 + (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 + k^2 - 6k + 9 = k^2 + 4k + 4 + k^2 + 2k + 1$$
$$\Leftrightarrow -8k - 6k = 5 - 10$$
$$\Leftrightarrow -14k = -5$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{14}$$

6. $A_{\text{sombreada}} = A_{[ABC]} - A_{[DEF]}$

Como $\overline{AB} = \overline{AC}$ e o triângulo [*ABC*] é retângulo, então:

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}+1\right)}{2} = \frac{7 + 2\sqrt{7} + 1}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{2} = 4 + \sqrt{7}$$

$\overline{DF} = \frac{\overline{AB}}{2}$, então $\overline{DF} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$.

$\overline{DF} = \overline{EF}$, pelo que o triângulo [*DEF*] é retângulo.

Assim:

$$A_{[DEF]} = \frac{\frac{\sqrt{7}+1}{2} \times \frac{\sqrt{7}+1}{2}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{7}}{8} = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{7}$$

$$A_{\text{sombreada}} = 4 + \sqrt{7} - \left(1 - \frac{1}{4}\sqrt{7}\right) = 3 + \frac{3}{4}\sqrt{7}$$

Ou

$$A_{\text{sombreada}} = 3 \times A_{[AED]} = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}+1}{2} \times \frac{\sqrt{7}+1}{2} = \frac{3}{8} \times \left(7 + 2\sqrt{7} + 1\right) =$$
$$= \frac{3}{8} \times \left(8 + 2\sqrt{7}\right) = 3 + \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

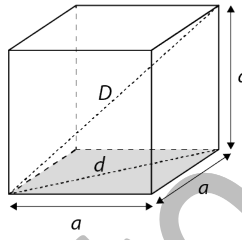
Resposta: (A)

7. Opção (D)

Comecemos por determinar a medida da diagonal espacial de um cubo de aresta $a,$ com $a > 0$:

$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2$

$D^2 = d^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 3a^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D>0} D = \sqrt{3}a$



A diagonal espacial D do cubo é o diâmetro da esfera circunscrita ao cubo, logo o seu raio é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Assim, o volume da esfera é igual a:

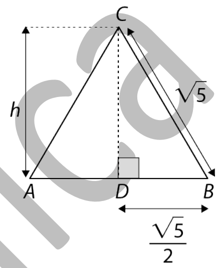
$\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$ unidades de volume.

8. Opção (B)

$P_{[ABC]} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{5}$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 5 = h^2 + \frac{5}{4} \Leftrightarrow 5 - \frac{5}{4} = h^2$

$\Leftrightarrow \frac{15}{4} = h^2$



$A_{[EFDC]} = \frac{15}{4}$

9. Opção (C)

(A) $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{27} = 2 - 3 = -1$

$\sqrt[3]{8 - 27} = \sqrt[3]{-19} \neq -1$

$\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a - b}$ é uma proposição falsa.

(B) $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[5]{-1} = 2 \times (-1) = -2$

$\sqrt[15]{8 \times (-1)} = \sqrt[15]{-8} = -\sqrt[15]{8} = -\sqrt[5]{2} \neq -2$

$\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[3]{a} \times \sqrt[5]{b} = \sqrt[15]{a \times b}$ é uma proposição falsa.

(C) $\forall a, b \in \mathrm{IR},\ \sqrt[9]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[9]{a} \div \sqrt[9]{b^3} = \sqrt[9]{\frac{a}{b^3}}$ é uma proposição verdadeira.

(D) $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$

$\forall a \in \mathrm{IR}, \sqrt{a^2} = a$ é uma proposição falsa

10. $\boldsymbol{2\sqrt{3}x - 1 = 3\sqrt{2}x + 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x = 4 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)x = 4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{12-18}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}$$

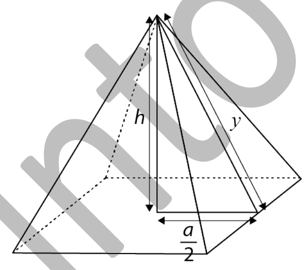
$\text{C. S.} = \left\{\frac{-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{3}\right\}$

11. $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} = 2 \times \frac{1}{3} \times A_b \times h =$

$$= \frac{2}{3} \times a^2 \times h =$$

$$= \frac{2}{3} a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} a =$$

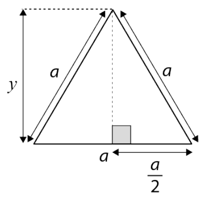
$$= \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$$



Cálculo auxiliar

$$a^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 - \frac{a^2}{4} = y^2 \Leftrightarrow \frac{3a^2}{4} = y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} a^2$$

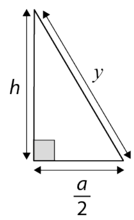


$$y^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 = h^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a^2 = h^2 \Leftrightarrow h = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow h = \pm \frac{|a|}{\sqrt{2}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{a>0} h = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow h = \pm \frac{\sqrt{2}a}{2}$$



Como $h > 0$, então $h = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

12. **.** Seja M o ponto médio de $[AB]$. Então, $M\left(\frac{7}{2}, 3\right)$.

$d(A,B) = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

A equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$ é:

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 5$$

12.2. O triângulo $[ABC]$ é equilátero se e somente se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

$\overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\overline{BC} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

$\overline{AC} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$

$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$

$\Leftrightarrow 8y - 4y = 8x - 6x - 4 + 9$

$\Leftrightarrow 4y = 2x + 5$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

Logo, $C\left(x, \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right)$.

$\overline{AC} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-4)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - 2\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} = 5$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 128x + 256 + 4x^2 - 12x + 9 = 80$

$\Leftrightarrow 20x^2 - 140x + 185 = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 37 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 4 \times 37}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm \sqrt{192}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{28 \pm 8\sqrt{3}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7+2\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{7-2\sqrt{3}}{2}$

13. $\sqrt[6]{4a^4} \times \left(2^2 a^{-2} b^{12}\right)^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{2a^2} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} = 2^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} =$

$= 2^0 \times a \times b^{-2} =$

$= \frac{a}{b^2}$

14. . $A(0,3)$

$B(x,y)$, com $x^2 = 12y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{12}$, logo $y \geq 0$.

$\overline{AB} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} =$

$= \sqrt{12y + y^2 - 6y + 9} =$

$= \sqrt{y^2 + 6y + 9} =$

$= \sqrt{(y+3)^2} =$

$= |y+3| =$

$= y + 3$, pois $y + 3 > 0$.

15. . $x^2+y^2+8x+6y=0 \Leftrightarrow x^2+8x+16\ +y^2+6y+9=16+9$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y+3)^2=25$$

Logo, o centro da circunferência tem coordenadas$(-4,-3)$.

15.2. $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+8x+16+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow -6y=8x+25$

$\Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}$

15.3.

- Interseção da circunferência com o eixo Ox:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+8)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-8 \\ y=0 \end{cases}$$

Como A tem menor abcissa, então $A(-8{,}0)$.

- Interseção da circunferência com o eixo Oy:

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+6y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+6)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-6 \\ x=0 \end{cases}$$

Como C tem menor ordenada, então $C(0,-6)$.

Reta AB: $y=mx+b$ $\quad$ $A(-8{,}0)$ $\quad$ $B(-4,-6)$

$m=\frac{-6-0}{-4+8}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+b$

Como o ponto $A(-8{,}0)$ pertence à reta, vem que:

$0=-\frac{3}{2}\times(-8)+b \Leftrightarrow 0=12+b \Leftrightarrow b=-12$

AB: $y=-\frac{3}{2}x-12$

Uma condição que define o trapézio $[OABC]$ é:

$$x\leq 0 \ \wedge\ -6\leq y\leq 0 \ \wedge\ y\geq -\frac{3}{2}x-12$$

16. Sol. D

17. **Opção (D)**

$\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}\times\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{a^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$

18. $A=(2x^6y^8)^{-\frac{1}{4}}\times\sqrt[4]{8x^{-2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2x^6y^8}}\times\sqrt[4]{8x^{-2}}=$

$=\sqrt[4]{\frac{8x^{-2}}{2x^6y^8}}=$

$=\sqrt[4]{\frac{4}{x^8y^8}}=$

$=\frac{\sqrt[4]{2^2}}{x^2y^2}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{(xy)^2}$

b)

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2^4}\times 2}=$$

$=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}\times 2}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt[3]{2}}=$

$=\frac{1}{4}\times\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}=$

$=2^{-2}\times 2^{\frac{1}{6}}=$

$=2^{-\frac{11}{6}}$

19. Seja x a altura de um dos triângulos que são as faces laterais da pirâmide.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2 \Leftrightarrow a^2-\frac{a^2}{4}=x^2$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{4}a^2$

Logo, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Assim, a área pedida é dada por:

$a^2+4\times\frac{a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}=a^2+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=a^2+\sqrt{3}a^2=\left(1+\sqrt{3}\right)a^2$

20. **Opção (D)**

A opção (A) é falsa, pois, por exemplo, se $a=1$ e $b=4$, então $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{1}+\sqrt{4}=1+2=3$ e $\sqrt{a+b}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, mas $3\neq\sqrt{5}$.

A opção (B) é falsa, pois $\sqrt{(-a)^2}=|a|=a$. Assim, se, por exemplo, $a=3$, $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{(-3)^2}==|-3|=3$ e $3\neq -3$.

A opção (C) é falsa, pois $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} \times \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{a^2 \times b^3}$. Assim, se, por exemplo, $a = 1$ e $b = 64$, então $\sqrt[3]{a} \times \sqrt{b} = \sqrt[3]{1} \times \sqrt{64} = 1 \times 8 = 8$ e $\sqrt[6]{a \times b} = \sqrt[6]{1 \times 64} = \sqrt[6]{64} = 2$, mas $8 \neq 2$.

A opção (D) é verdadeira, pois $\sqrt[3]{a} : \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^2} : \sqrt[6]{b^3} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{b^3}}$.

21. Opção (A)

$$\left(\sqrt[5]{a^2 - b^2}\right)^{-1} \times \left(\sqrt[5]{a + b}\right)^2 = \sqrt[5]{(a^2 - b^2)^{-1}} \times \sqrt[5]{(a + b)^2} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a+b)}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{a+b}{a-b}} =$$

$= \sqrt[5]{-32}$, pois $a + b = -32(a - b)$, logo $\frac{a+b}{a-b} = -32$.

$$= -2$$

22. Opção (B)

$$\sqrt{7}x - 4 = 2\sqrt{3}x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{7}x - 2\sqrt{3}x = 5 \Leftrightarrow \left(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right)x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{7}-2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\left(\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+2\sqrt{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{7}+10\sqrt{3}}{7-12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{7}+10\sqrt{3}}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$$

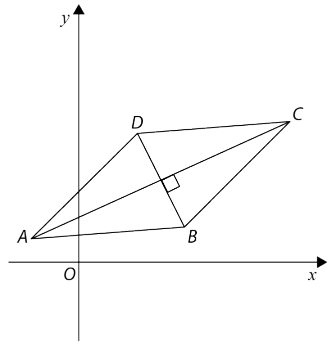
$\text{C.S.} = \left\{-\sqrt{7} - 2\sqrt{3}\right\}$

23. . $r = d(B, D) = \sqrt{(9-5)^2 + (3-11)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$

A equação reduzida da circunferência de centro em B e que passa em D é:

$$(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 80$$

b). Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares e se bissetam. Determinemos, então, a mediatriz de [*BD*]:



$$\sqrt{(x-9)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-11)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-9)^2 + (y-3)^2 = (x-5)^2 + (y-11)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 18x + 81 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 22y + 121$$

$$\Leftrightarrow -6y + 22y = 18x - 10x - 81 - 9 + 25 + 121$$

$$\Leftrightarrow 16y = 8x + 56$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

Como A pertence á mediatriz de $[BD]$:

$2 = \frac{a+1}{2} + \frac{7}{2} \Leftrightarrow 4 = a + 1 + 7 \Leftrightarrow 4 = a + 8 \Leftrightarrow a = -4$

Logo, $A(-3, 2)$.

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[BD]$:

$M = \left(\frac{9+5}{2}, \frac{3+11}{2}\right) = (7, 7)$ $\qquad\qquad \overrightarrow{AM} = (7, 7) - (-3, 2) = (10, 5)$

$C = M + \overrightarrow{AM} = (7, 7) + (10, 5) = (17, 12)$

Logo, $b = 16$ e $c = 11$.

24. Opção (B)

$$\sqrt[9]{8a^3} \times (2^4 a^{-4} b^{24})^{-\frac{1}{12}} = \sqrt[9]{(2a)^3} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times b^{-2} =$$

$$= \sqrt[3]{2a} \times \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{a} \times \frac{1}{b^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}}{b^2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2}}{b^2}$$

25. Seja $P(x, y)$ um ponto genérico do plano.

$d(P, A) = 2d(P, B)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4((x-1)^2 + y^2)$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 3y^2 + 4y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = \frac{4}{3} + 4 + \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{52}{9}$

Esta equação define uma circunferência de centro $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{52}}{3} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

26. $(5+\sqrt{3})x^2 + (2-\sqrt{3})x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(2-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 - 4 \times (5+\sqrt{3}) \times (-1)}}{2(5+\sqrt{3})}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{3} \pm \sqrt{4-4\sqrt{3}+3+20+4\sqrt{3}}}{2(5+\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{2(5+\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2(5+\sqrt{3})} \quad \vee \quad x = \frac{-2+\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{2(5+\sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+4\sqrt{3}}{2(5+\sqrt{3})} \quad \vee \quad x = \frac{-2-2\sqrt{3}}{2(5+\sqrt{3})}$$

Uma vez que pretendemos a solução positiva da equação, então a solução pretendida é

$x = \frac{-2+4\sqrt{3}}{2(5+\sqrt{3})}$.

Racionalizando o denominador, vem que:

$$\frac{(-2+4\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}{2(25-3)} = \frac{-10+2\sqrt{3}+20\sqrt{3}-12}{44} = \frac{-22+22\sqrt{3}}{44} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

27. $A_{[ABC]} = \frac{b \times a}{2}$, com:

$b = |\text{abcissa de } A - \text{ abcissa de } B| = |6-(-5)| = |11| = 11$

$a = |\text{ordenada de } A - \text{ordenada de } C| = |3-(-17)| = |20| = 20$

Então, $A = \frac{11 \times 20}{2} = 110$.

Resposta: **(B)**

28. Equação da circunferência: $x^2 + y^2 = 12$

O raio da circunferência é $\sqrt{12}$, ou seja, $2\sqrt{3}$.

Assim, $B\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ e $C\left(0, -2\sqrt{3}\right)$.

O ponto A pertence à circunferência e tem ordenada 3.

$x^2 + 3^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

Assim, $A\left(\sqrt{3}, 3\right)$, pelo que $D\left(\sqrt{3}, -3\right)$.

Base maior do trapézio: $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$

Base menor do trapézio: $\overline{AD} = 6$

Altura do trapézio: $\sqrt{3}$

A medida da área do trapézio é dada por: $\frac{4\sqrt{3}+6}{2} \times \sqrt{3} = \left(2\sqrt{3}+3\right) \times \sqrt{3} = 6 + 3\sqrt{3}$, como se queria demostrar.

29. Opção (A)

Seja A a área total da pirâmide quadrangular regular de aresta a.

$A = a^2 + 4 \times \frac{a \times h}{2}$, onde h é a altura de cada uma das faces.

Assim:

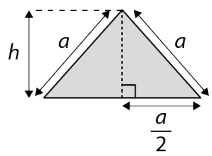
$A = a^2 + 4 \times \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} =$

Cálculo auxiliar

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$

Logo, $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$.



$= a^2 + 4\frac{\sqrt{3}a^2}{4} =$

$= a^2 + \sqrt{3}a^2 =$

$= a^2(1 + \sqrt{3})$

30. Seja l o lado do quadrado inscrito na circunferência de raio r e A a área do quadrado.

$$A = l^2 = \frac{2}{\left(\sqrt{7}-1\right)^2} =$$
$$= \frac{2}{\left(\sqrt{7}\right)^2 - 2\sqrt{7} + 1} =$$
$$= \frac{2}{8-2\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{1}{4-\sqrt{7}} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{\left(\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)\right)} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{16-7} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

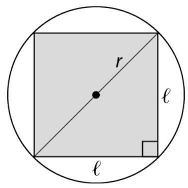
Cálculo auxiliar

$r = \frac{1}{\sqrt{7}-1}$

$l^2 + l^2 = (2r)^2$

$\Leftrightarrow 2l^2 = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{7}-1}\right)^2$

$\Leftrightarrow l^2 = \frac{2}{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}$



31. Opção (D)

$$(2a^6b^8)^{-\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2a^6b^8}} \times \sqrt[4]{8a^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{8a^{-2}}{2a^6b^8}} =$$
$$= \sqrt[4]{\frac{4}{a^8b^8}} =$$
$$= \frac{4^{\frac{1}{4}}}{(a^8b^8)^{\frac{1}{4}}} =$$
$$= \frac{(2^2)^{\frac{1}{4}}}{a^2 \times b^2} =$$
$$= \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(ab)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{(ab)^2}$$

32. Opção (A)

33. **Sol.**. $\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$

34.