MATEMÁTICA 12º ANO

Domínios, Assíntotas e Derivadas ------------------------prof. Mónica Pinto

Tipo de Função	Domínio
Considerando $D_f = D_g = \mathbb{R}$	
Polinomial $a_0x^m + \ldots + a_m$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\}$
$\sqrt[n]{f(x)}$	se $\boldsymbol{n}$ ímpar : $\mathbb{R}$ Se n par: $D = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0\}$
$\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$	$D = \{x \in \mathbb{R}: g(x) > 0\}$
$\ln f$	$D = \{x \in \mathbb{R}: f > 0\}$
e^f	$\mathbb{R}$

<u>Assíntotas Verticais ($x = a$) ao gráfico de f</u>

1º Estudar o domínio da função.

2º Para os pontos a que não pertencem ao domínio, mas que são aderentes calcular $\lim_{x \to a^{\pm}} f(x)$.
Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ então $x = a$ é A. V.

Nota:
Nas **funções por ramos** é necessário estudar os limites laterais no ponto que separa os ramos da função. Se algum deles der ∞, então nesse ponto existe uma A.V.

<u>Assíntotas não verticais (oblíquas ou horizontais) ($y = mx + b$) ao gráfico de f</u>

1º Determinar o declive da assíntota: $\boldsymbol{m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$

- Se $m = \infty$ não existem assíntotas não verticais.
- Se $m \neq 0 \neq \infty$ então existe A.O desde que $b \neq \infty$.
- Se $m = 0$, só poderão existir assíntotas horizontais

2º Calcular o $\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]}$.

- Para existir assíntota , $b \neq \infty$.

Observações Se $y = ax + b$ é assíntota para $\to \pm\infty$ ao gráfico de $f(x)$, então:

- $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = a$
- $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$
- $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x)] = \pm\infty$

Taxa de variação média : $T.M.V._{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **(declive da reta secante)**

Derivada ,Taxa de Variação Instantânea ou Velocidade(por definição) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Para existir derivada num ponto a, as derivadas laterais têm de existir e serem iguais.

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = a$: $y = f'(a)x + b$

1º Achar a derivada da função : $f'(x)$
2º Calcular o declive da reta tangente: $\boldsymbol{m = f'(a)}$ (isto é, ir à expressão da derivada e substituir o x pelo valor a.)
3º Determinar $f(a)$, (isto é, ir à expressão da função inicial e substituir o x pelo valor a.)
4º Substituir em $y = mx + b$, o $y \leftarrow f(a), m \leftarrow f'(a), x \leftarrow a$ para calcular o b

Exemplo:
Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $x = 2$ sendo $f(x) = 2x^2 + 1$.
Resolução:
$f'(x) = 4x$ *, então* $m = f'(2) = 4 \times 2 = 8$; $f(2) = 2 \times 2^2 + 1 = 9$; $y = mx + b$, $9 = 8 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -7$
A equação da reta pedida é: $y = 8x - 7$

Monotonia (crescente/decrescente) e Extremos da função (máximos e mínimos)

1º Achar a derivada da função.
2º Achar os zeros da derivada da função, isto é resolver $f'(x) = 0$.
3º Construir um quadro de sinais para a derivada. Onde a derivada é positiva a função é crescente e onde a derivada é negativa a função é decrescente, e vice-versa.

Graficamente: *uma função não tem derivada nos pontos de descontinuidades e nos "bicos".*

Resultados:
Derivabilidade $\Longrightarrow$Continuidade Continuidade $\not\Longrightarrow$Derivabilidade Não Continuidade $\Longrightarrow$Não Derivabilidade

Regras das Derivadas

K constante ; u e v funções de x:		
$k' = 0$		
$x' = 1$		
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(e^u)' = u' \times e^u$	$(\sin u)' = u' \times \cos u$
$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$(a^u)' = u' \times a^u \times \ln\ a$	$(\cos u)' = -u' \times \sin u$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$
$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}$	

Propriedades da derivada

$(k \cdot u)' = k \cdot u'$

$[u \pm v]' = u' \pm v'$

Derivada do produto:
$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Derivada da divisão:
$(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Derivada da função composta
$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Concavidades e pontos de inflexão

1º Achar a segunda derivada da função.

2º Achar os zeros da segunda derivada da função, isto é resolver $f''(x) = 0$.

3º Construir um quadro de sinais para a segunda derivada. Onde a segunda derivada é positiva o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima e onde segunda derivada é negativa o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo. **Um ponto de inflexão é um ponto do domínio onde se dá a mudança da concavidade.**