MATEMÁTICA 12º ANO

Exponenciais e logaritmos--------------------Prof. Mónica Pinto

1. Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações:

a) $2^{2x-2}=2^{3-3x}$

b) $2^{x-1}=2^{3x}$

c) $4^{x}=2^{x+3}$

d) $3^{x+1}=27$

e) $3^{2x-5}=\sqrt{3}$

f) $2^{3-2x}=1$

g) $(\sqrt{3})^{x+3}-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}=0$

h) $9^{x}+3^{x+1}=4$

i) $5^{x+1}-6+5^{-x}=0$

j) $4^{x^2-4x}=\frac{1}{16}$

k) $2^{x+1}\times 2^{x-1}=256$

l) $2^{2x}-3\times 2^{x}-4=0$

m) $2^{4x+1}-3\times 2^{2x+2}=-16$

n) $2^{x+1}+14=2^{-x+4}$

Sol. a. 1 b. $-\frac{1}{2}$ c. 3 d. 2 e. $\frac{11}{4}$ f. $\frac{3}{2}$ g. $-\frac{13}{3}$ h. 0 i. -1,0 j. $2\pm\sqrt{2}$ k. 4 l. 2 m. $\frac{1}{2}$, 1 n. 0

2. Resolve, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

a) $25^{2x-1}<1$

b) $16^{2x-4}\geq 32^{x-1}$

c) $2^{x+1}\leq 16$

d) $4^{2x^2}\geq 2$

e) $2^{x}\leq 16^{\frac{1}{x}}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}>\frac{1}{4}$

Sol. a. $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ b. $\left[\frac{11}{3},+\infty\right[$ c. $]-\infty,3]$ d. $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ e. $]-\infty,,-2]\cup]0,2]$ f. $]-\infty,2[$

3. Sem recorrer à calculadora, determina o valor de :

a) $\log_3 9$

b) $\log\ 1000$

c) $\log_5\sqrt{5}$

d) $\log_3(\frac{1}{27})$

e) $\log_2 0{,}25$

f) $\ln\ \frac{1}{e}$

g) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

Sol. a. 2 b. 3 c. $\frac{1}{2}$ d. -3 e. -2 f. -1 g. $-\frac{1}{2}$

4. Mostra que as igualdades são verdadeiras, quaisquer que sejam os valores das variáveis para os quais as expressões envolvidas têm significado:

a) $\ln x^3+\ln x-\ln\sqrt{x}=\frac{7}{2}\ln x$

b) $2\ln\left(a^2\sqrt{e}\right)=4\ln(a)+1$

c) $\ln\left(e^2\sqrt{x}\right)-2=\frac{\ln x}{2}$

d) $2^{1+\log_2(3x)}=6x$

e) $2^{3\log_2(x^2)}=x^6$

f) $5^{2\log_5(x^2)-3\log_5 x}=x$

g) $3^{2-\log_3 y}=\frac{9}{y}$

5. Resolve as seguintes equações:

a) $e^{2x} = e^4$

b) $e^x = 5$

c) $e^{2x+1} = 8$

d) $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

e) $e^x + 6e^{-x} = 5$

Sol a. 2 b. ln 5 c. $\frac{3}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}$ d. 0 e. $\{\ln 2, \ln 3\}$

6. Sem recorrer à calculadora, resolve as seguintes equações:

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_3(2x) = \log_3(x+4)$

c) $\log_3(x+1) = -1$

d) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

e) $\ln x = \frac{1}{2}$

f) $\ln(2^x - 1) = \ln 7$

g) $4 + 2\ln(3x+1) = 1$

h) $\ln(5x-1) - \ln 2 = \ln(2x+1)$

i) $2\ln x = \ln 3 + \ln(2x-3)$

Sol. a. 3^4; b. 4 c. $-\frac{2}{3}$ d. 3 e. $\sqrt{e}$ f. 3 g. $\frac{e^{-\frac{3}{2}}-1}{3}$ h. 3. i. 3

7. Recorrendo aos limites notáveis $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, calcula:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x}}{2x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{3x}}{2x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x^2 + 7x}$

f) $\lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3} - 1}{2x - 6}$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{1 - x^2}$

h) $\lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{3x}$

Sol. a. e , b. 1 c. $-\frac{3}{2}$ d. $-\frac{1}{2}$ e. $-\frac{3}{7}$ f. $\frac{1}{2}$ g. $-\frac{1}{2}$ h. 1 i. 2 j. $\frac{1}{2}$

8. Recorrendo aos limites notáveis $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$, calcula:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^{100}}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x+2}}{x^5}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4e^x - xe^x}{x^7}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1 + e^{3x}}{x^3}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + 3e^x}{e^x}$

f) $\lim_{x\to 0^+} (x \cdot e^{\frac{1}{x}})$

g) $\lim_{x\to -\infty} (xe^{-x})$

h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - x}{x - 1}$

Sol. a. $+\infty$ b. $+\infty$ c. $-\infty$ d. $+\infty$ e. 3. f. $+\infty$ g. 0 h. $+\infty$

9. Recorrendo aos limites notáveis $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, calcula:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{3x}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^3)}{x^2 + 3x - 1}$

c) $lim_{x\to -\infty} \frac{3 - x}{\ln(1 - x)}$

d) $\lim_{x\to 0^+}(x\ln\left(\frac{1}{x}\right))$

e) $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x)$

Sol. a. 0 b. 0 c. $+\infty$ d. 0 e. 0

10. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & se\ x < 0 \\ \ln(\sqrt{x + e}) & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

Averigua se a função g é contínua no ponto 0.

Sol sim

11. Determina o valor real positivo a, por forma a que a seguinte função seja contínua no ponto 0:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{x}{a}} - 1}{x} & se\ x < 0 \\ \frac{1}{2} & se\ x = 0 \\ \frac{\ln(1 + ax)}{16x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

Sol. 2

12. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} & se\ x < 4 \\ \ln(2e^x - e^4) & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

Averigua se a função f é contínua em $x = 4$.

Exame 2014, 1ª fase

Sol.Não

13. Para cada uma das seguintes funções, estuda-a quanto à existência de assíntotas e escreve uma equação para cada uma delas.

a) $f(x) = 2x + 3 + e^x$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{2^x}{x}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 + e^x & se\ x \leq 0 \\ \frac{x^2-1}{x} & se\ x > 0 \end{cases}$

Sol. a. A.O. $y = 2x + 3$ b. A.V. $x = 2, x = 0$ AH$y = 0$ c. AV $x = 0$ AH $y = 0$ d. AV. $x = 0, AO\ y = x. AH\ y = 1$